

الجبر

للفصف الثالث الاعدادى

الفصل الدراسى الأول

اعداد

أ/ رفعت سعيد عبد المجيد

معلم أول (أ) رياضيات بمعهد شعشاع بالمنوفية

٢٠١٨

يسمى (p, b) زوجا مرتبا، ويسمى p بالمسقط الأول، b بالمسقط الثانى

ملاحظات :

$$*(p, b) \neq (b, p) \text{ بينما } \{p, b\} = \{b, p\}$$

* فى المجموعات لا يمكن تكرار العناصر بينما فى الزوج المرتب يمكن تكرار العنصر

* لا يوجد زوج مرتب خال بينما فى المجموعات توجد مجموعة خالية \emptyset

* كل زوج مرتب يمثل بنقطة واحدة فقط فى المستوى الاحداثى

تساوى زوجين مرتبين

إذا كان $(p, b) = (s, v)$ فإن $p = s, b = v$

أمثلة

مثال ١ إذا كان $(p - 7, b + 3) = (11, 23)$ أوجد قيمتى p, b
الحل :

$$23 = 3 + b$$

$$3 - 23 = b$$

$$20 = b$$

$$11 = 7 - p$$

$$7 + 11 = p$$

$$18 = p$$

مثال ٢ إذا كان $(s^2 - 1, \sqrt{v}) = (99, 5)$ أوجد قيمتى s, v

الحل

$$5 = \sqrt{v}$$

$$25 = v$$

$$125 = v$$

$$99 = 1 - s^2$$

$$100 = 1 + 99 = s^2$$

$$s = \pm 10$$

مثال ٣ إذا كان $(٣^{س-٢} ، س ص) = (٦ ، ٨١)$ فأوجد قيمتي س ، ص

الحل

$$٦ = س ص$$

$$٦ = س \therefore$$

$$٦ = س \therefore$$

$$١ = س \therefore$$

$$٨١ = ٣^{س-٢}$$

$$٣^٤ = ٣^{س-٢}$$

$$٤ = س - ٢$$

$$٦ = س \therefore$$

مثال ٤ إذا كان $(٣٢ ، ٥ ب) = (٣٤٣ ، ٢٠)$ فأوجد قيمة $\sqrt[٣]{٢٣+ب}$

الحل

$$٢٠ = ٥ ب$$

$$٤ = ب$$

$$٣٤٣ = ٣٢$$

$$\sqrt[٣]{٣٤٣} = ٢$$

$$٧ = ٢$$

$$\therefore \text{قيمة } \sqrt[٣]{٢٣+ب} = \sqrt[٣]{٤+(٧)} = \sqrt[٣]{٢٠} = ٥$$

مثال ٥ إذا كان $(\frac{١}{٦٤} ، \frac{١}{٥}) = (\frac{س}{١٠} ، ص^{-٢})$ فأوجد قيمتي س ، ص

الحل

$$\frac{١}{٦٤} = ص^{-٢}$$

$$\frac{١}{٦٤} = \frac{١}{ص^٢}$$

$$٦٤ = ص^٢$$

$$٨ \pm = ص$$

$$\frac{١}{٥} = \frac{س}{١٠}$$

$$١٠ = ٥ س$$

$$٢ = س$$

مثال ٦) اذا كان $(س^{\circ}, ص+١) = (٣٢, \sqrt[٣]{٢٧})$ أوجد قيمة س ، ص

الحل

$$\sqrt[٣]{٢٧} = ص+١$$

$$١-٣ = ص$$

$$ص = ٢$$

$$٣٢ = س^{\circ}$$

$$س = ٢$$

مثال ٧) اذا كان $(١+پ, ٥) = (-٢, ب-١)$ أوجد قيمة $پ٢+ب$

الحل

$$٥ = ب-١$$

$$١+٥ = ب$$

$$ب = ٦$$

$$٢- = ١+پ$$

$$١-٢- = پ$$

$$٣- = پ$$

$$پ٢+ب = ٢(٣-) + ٦ = صفر$$

مثال ٨) اذا كان $(س-١, ص٣) = (٣, ١٢٥)$ أوجد قيمة س ، ص

الحل

$$١٢٥ = ص٣$$

$$\sqrt[٣]{١٢٥} = ص$$

$$ص = ٥$$

$$٣ = س-١$$

$$١+٣ = س$$

$$س = ٤$$

مثال ٩) اذا كان $(س-١, ١١) = (٨, ص+٣)$ أوجد قيمة $\sqrt[٣]{س+٢}$

الحل

$$١١ = ص+٣$$

$$ص = ٨$$

$$٨ = س-١$$

$$س = ٩$$

$$قيمة \sqrt[٣]{س+٢} = \sqrt[٣]{٩+٢} = \sqrt[٣]{١١} = ٥$$

مثال ١٠) اذا كان $(٢س - ١، ص - ٣) = (٧، ٥٩)$ احسب قيمة س ، ص

الحل

$$٧ = ٢س - ١$$

$$١ + ٧ = ٢س$$

$$٨ = ٢س$$

$$٤ = س$$

$$س = \pm ٢$$

$$٥٩ = ص - ٣$$

$$٥ + ٥٩ = ص$$

$$٦٤ = ص$$

$$ص = ٦٤$$

مثال ١١) اذا كان $(س + ٣، س + ٢ص) = (٥، ٦)$ احسب قيمة س ، ص

الحل

$$٥ = س + ٣$$

$$٥ - ٣ = س$$

$$٢ = س$$

$$٦ = س + ٢ص$$

$$٦ = ٢ + ٢ص$$

$$٢ - ٦ = ٢ص$$

$$ص = ٢$$

مثال ١٢) اذا كان $(س - ١، ٨) = (٨، \sqrt{ص})$ احسب قيمة س ، ص

الحل

$$٨ = س - ١$$

$$٩ = س$$

$$س = \pm ٩$$

$$٨ = \sqrt{ص}$$

بتكعيب الطرفين

$$٦٤ = ص$$

مثال ١٣) اذا كان $(س + ١، ٧) = (١٧، ص - ٣)$ احسب قيمة س ، ص

الحل

$$١٧ = س + ١$$

$$١٦ = س$$

$$٧ = ص - ٣$$

$$١٠ = ص$$

$$ص = ١٠$$

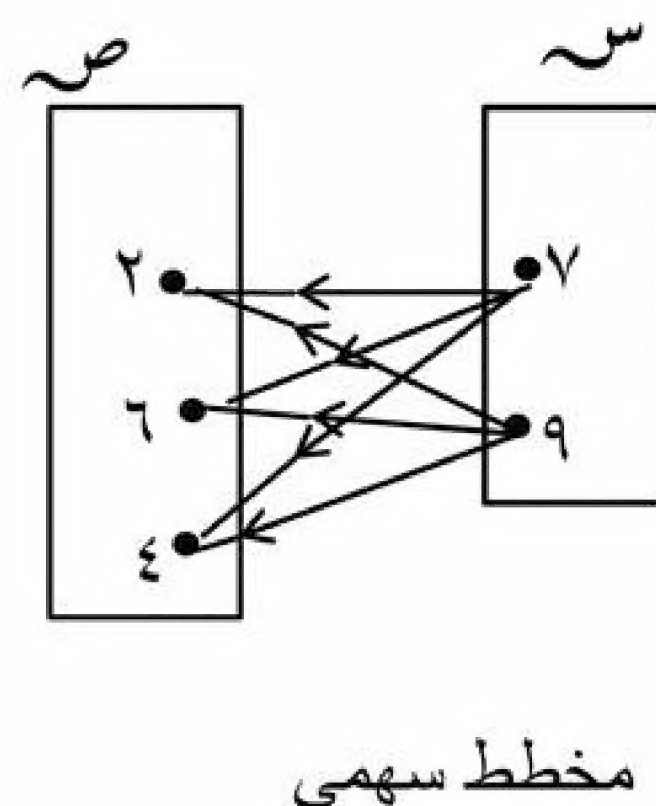
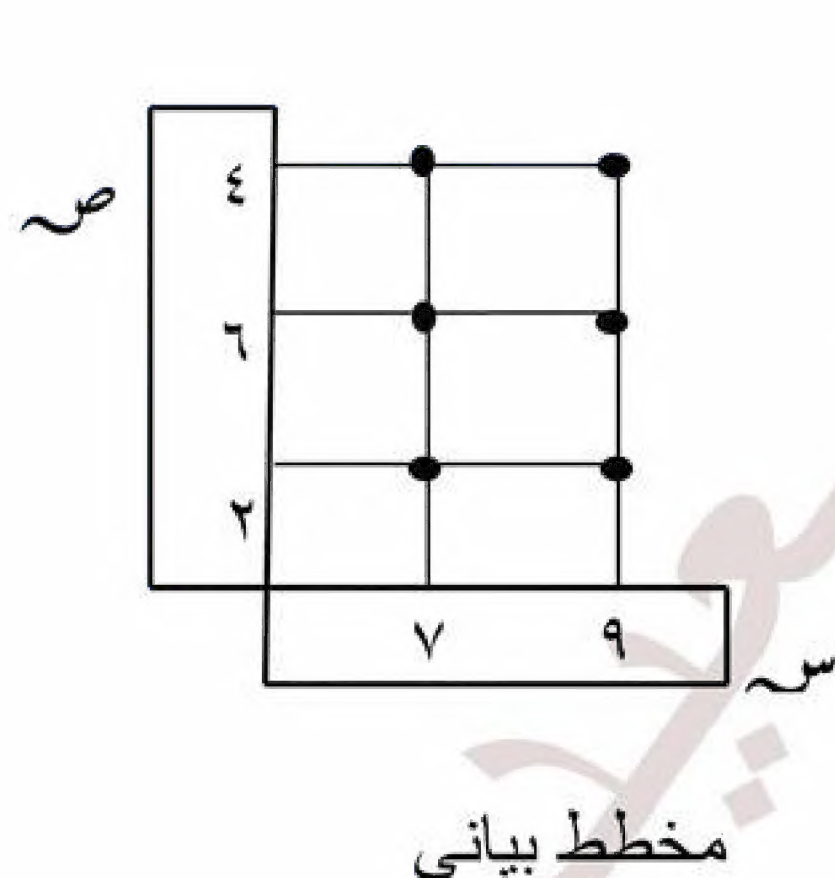
حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين وتمثيله

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة S في المجموعة V ، ويرمز له بالرمز $S \times V$ هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر ينتمي إلى S ومسقطها الثاني عنصر ينتمي إلى V ويمثل بمخطط سهمي أو بياني

مثال

إذا كانت $S = \{9, 7\}$ ، $V = \{4, 6, 2\}$ أوجد $S \times V$ و مثله بمخطط سهمي و آخر بياني

الحل: $S \times V = \{(4, 9), (6, 9), (2, 9), (4, 7), (6, 7), (2, 7)\}$



حاصل الضرب الديكارتي لمجموعة في نفسها

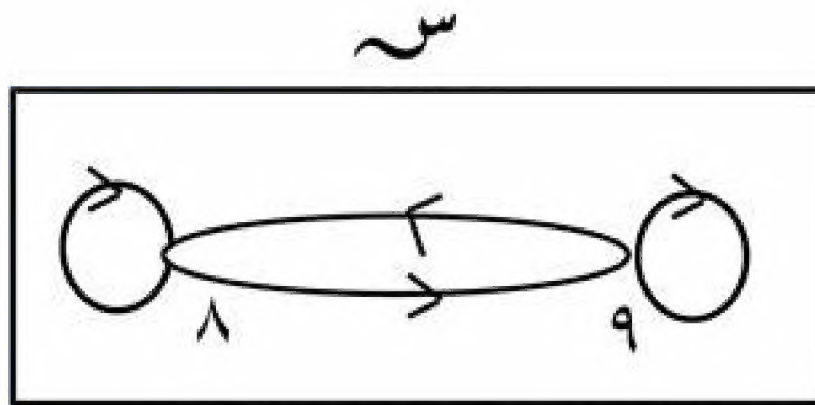
حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة S في نفسها ويرمز له بالرمز $S \times S$ أو بالرمز S^2 ويقرأ " S اثنين" هو: مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي كل من مسقطها الأول والثاني عنصر من عناصر S . أي أن:

$$S \times S = \{(b, p) : p \in S, b \in S\}$$

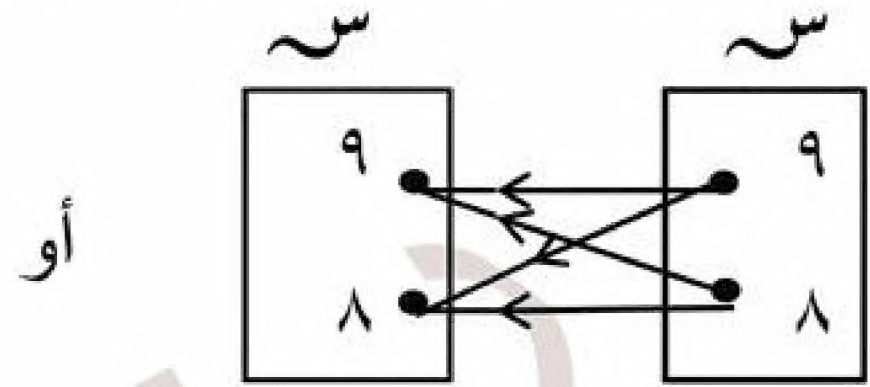
إذا كانت $\sim = \{8, 9\}$ أوجد $\sim \times \sim$ ومثله بمخطط سهمي و آخر بياني

الحل:

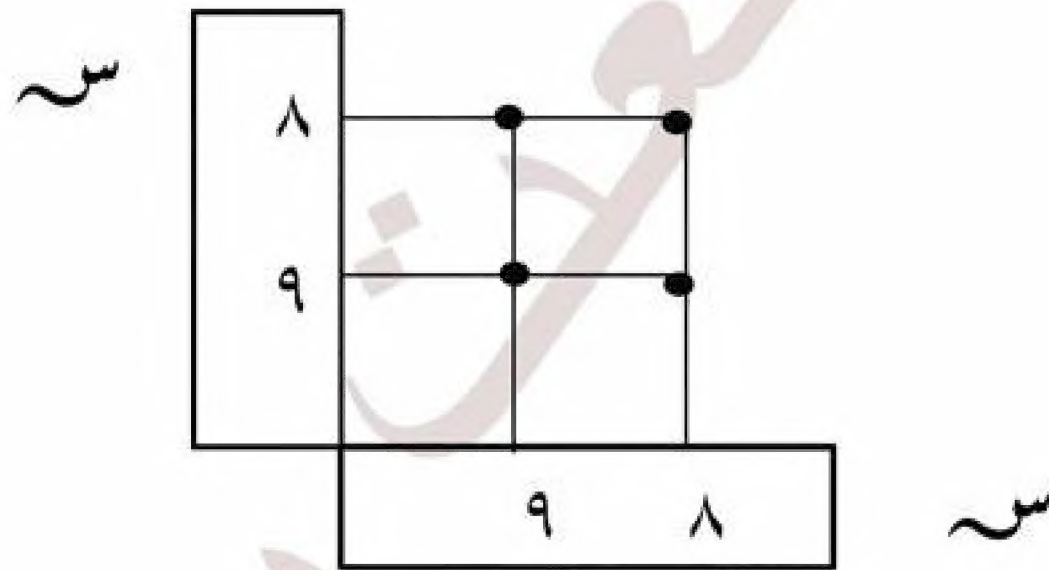
$$\sim \times \sim = \{(8,8), (9,8), (8,9), (9,9)\}$$



مخطط سهمي



مخطط سهمي



مخطط بياني

ملاحظات :

$$\sim \times \sim \neq \sim \times \sim$$

$$\emptyset = \sim \times \emptyset = \emptyset \times \sim$$

$$\sim \times (\sim \times \sim) = (\sim \times \sim) \times \sim = \sim \times \sim$$

حيث \sim ترمز الى عدد عناصر المجموعة

$$\sim \times \sim \ni (p, b) \text{ فإن } p \ni \sim, b \ni \sim$$

$$\sim \times \sim = \sim \times \sim$$

$$\sim \times \sim = \sim \times \sim$$

أمثلة محلولة:

مثال إذا كانت $\nu(\sim^2) = 25$ ، وكان $\nu = \{3, 8, 2\}$ أوجد $\nu(\sim \times \sim)$

الحل $\therefore \nu(\sim^2) = 25 \quad \therefore \nu(\sim) = 5$

، $\nu(\sim) = 3$

$\therefore \nu(\sim \times \sim) = \nu(\sim) \times \nu(\sim) = 3 \times 5 = 15$

$\therefore \nu(\sim \times \sim) = 3 \times 5 = 15$

مثال أكمل :

إذا كانت النقطة (٩ ، ٢ ج - ١٠) تقع على محور السينات فإن ج =

الحل

\therefore النقطة تقع على محور السينات $\therefore 2 - 10 = 0$

$\therefore 2 - 10 = 0 \quad \Leftarrow \quad \therefore 2 - 10 = 0$

مثال أكمل :

إذا كانت النقطة (١٢ - پ ، ٦) تقع على محور الصادات فإن پ =

الحل:

\therefore النقطة تقع على محور الصادات $\therefore 12 - p = 0$

$\therefore 12 = p$

مثال إذا كانت $\sim = \{7, 9\}$ ، $\sim = \{9, 15, 17\}$ ، $\sim = \{11, 17\}$

أوجد: (١) $\sim \cap \sim \times \sim$ (٢) $\sim \times (\sim - \sim)$

(٣) $\sim \cup \sim \times \sim$

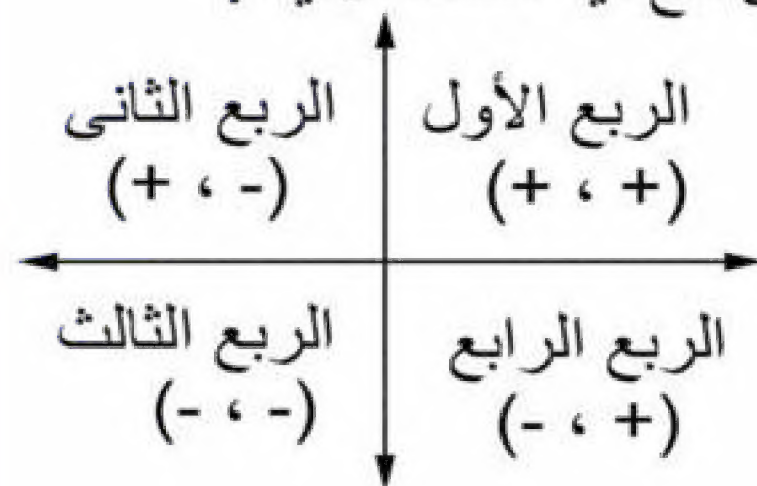
الحل

(١) $\sim \cap \sim \times \sim = \{11, 17\} \times \{9\} = \{(11, 9), (17, 9)\}$

$$\begin{aligned} (2) \quad \{ (15, 9), (9, 9), (15, 7), (9, 7) \} &= \{ 5, 9 \} \times \{ 9, 7 \} = (ص - ع) \times س \\ (3) \quad \{ 9, 7 \} \times \{ 7, 9, 15, 17 \} &= س \times (ص \cup ص) \\ \{ (9, 7), (7, 7), (9, 9), (7, 9), (9, 15), (7, 15), (9, 17), (7, 17) \} &= \end{aligned}$$

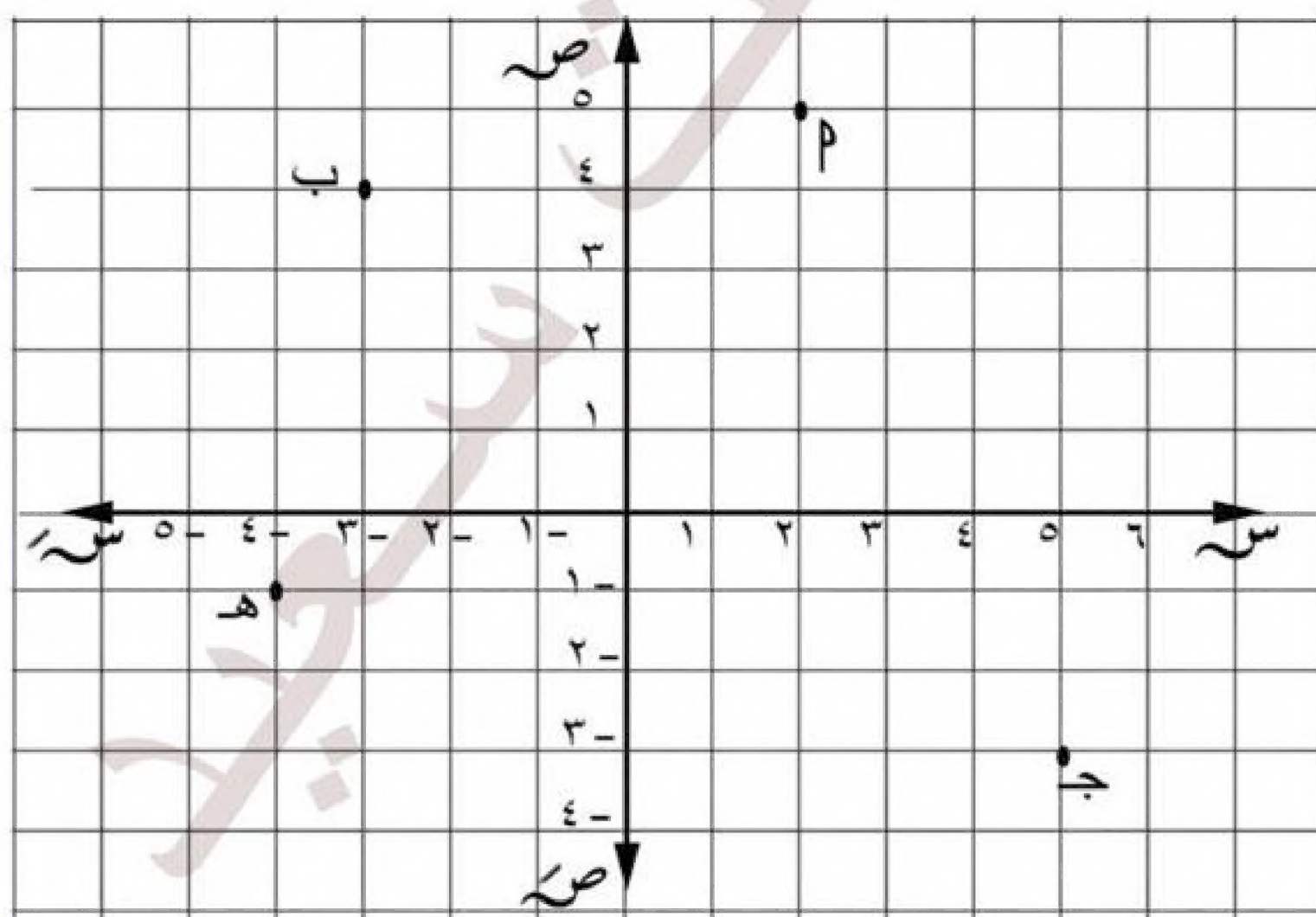
حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات الغير منتهية

مثال كون شبكة تربيعية متعامدة $ع \times ع$ ثم عين الربع الذى تقع فيه النقاط الآتية :
 $پ (5, 2)$ ، $ب (3, -4)$ ، $ج (5, -3)$ ، $هـ (-4, -1)$



الحل

$پ (5, 2)$ تقع فى الربع الأول
 $ب (3, -4)$ تقع فى الربع الثانى
 $ج (5, -3)$ تقع فى الربع الرابع
 $هـ (-4, -1)$ تقع فى الربع الثالث



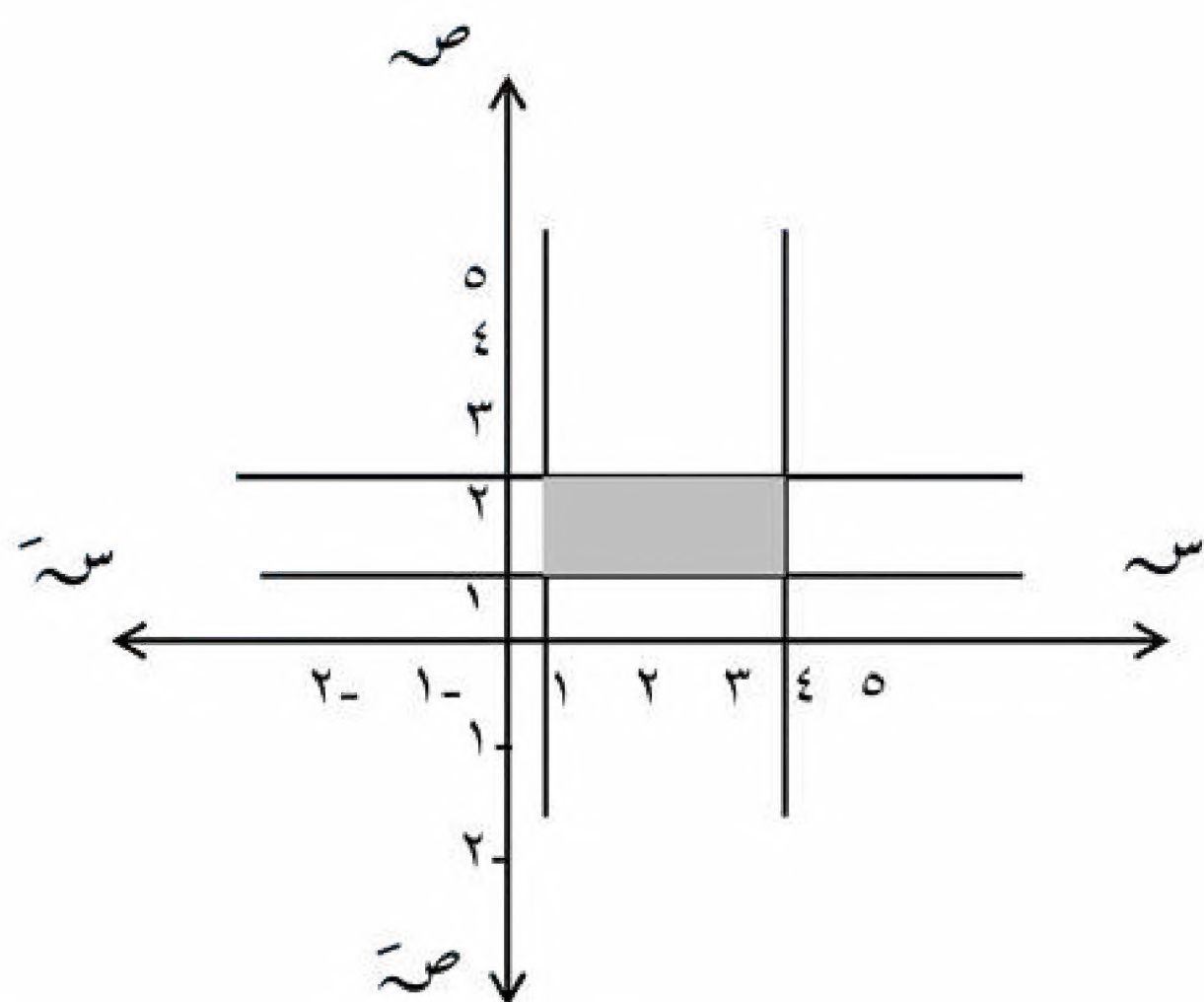
حاصل الضرب الديكارتي لفترتين

حاصل الضرب الديكارتي لفترتين هو مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي $ع \times ع$ لأن أى فترة هي مجموعة جزئية من $ع$

أمثلة اذا كانت $س = [1, 4]$ ، $ص = [1, 2]$ فمثل بيانيا المنطقة التى تمثل $س \times ص$

وبين أى من النقاط الآتية ينتمى لحاصل الضرب الديكارتي $س \times ص$

$(4, 0)$ ، $(2, 2)$ ، $(2, 4)$



$$(4, 0) \notin S \times S$$

$$(2, 2) \in S \times S$$

$$(2, 4) \in S \times S$$

(١) اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

تمارين محلولة

١) اذا كانت النقطة (p, b) تقع في الربع الثاني فإن p صفر

$$(p) > \quad (b) < \quad (=) (ج) =$$

٢) اذا كان $(7, 9) \in \{5, 9\} \times \{1, s\}$ فإن s =

$$(p) 7 \quad (b) 5 \quad (ج) 9$$

$$\{2\} \times \{3\} = \dots$$

$$(p) \{(3, 2)\} \quad (b) 6 \quad (ج) \{6\}$$

٤) اذا كانت $S = \{6, 7\}$ فإن $S \cap (\emptyset \times S) = \dots$

$$(p) \text{ صفر} \quad (b) \emptyset \quad (ج) 2$$

٥) النقطة تقع في الربع الثالث

$$(p) (-3, -4) \quad (b) (-4, 5) \quad (ج) (4, -3)$$

٦) اذا كانت $S \cap (S^2) = \{6\}$ فإن $S \cap (S) = \dots$

$$(p) 8 \quad (b) 8 \pm \quad (ج) 4$$

٧) اذا كانت $(s-7, 9-s)$ حيث $s \in S$ تقع في الربع الأول فإن $s = \dots$

$$(p) 8 \quad (b) 7 \quad (ج) 9$$

- ① > ② ٧ ③ $\{(3,2)\}$ ④ صفر
 ⑤ $(-4, -3)$ ⑥ ٨ ⑦ ٨

(٢) أكمل ما يلي :

- ① إذا كانت $s \times v = \{(1,2), (3,2), (5,2)\}$ فإن $s + (v) = \dots$
 ② إذا كانت $s = \{5\}$ فإن $s^2 = \dots$
 ③ إذا كانت $(5,3) \in \{6,3\} \times \{s+1, 8\}$ فإن $s = \dots$
 ④ النقطة $(0,4)$ تقع على محور
 ⑤ النقطة (s^2, v^2) تقع في الربع حيث $s \neq 0, v \neq 0$
 ⑥ إذا كانت النقطة $(s, 7)$ تقع على محور الصادات فإن $s + 5 = \dots$
 ⑦ إذا كانت النقطة (p, b) تقع على محور الصادات فإن $\frac{p}{b} = \dots$
 ⑧ إذا كانت $b > 3$ فإن النقطة $(5, b-3)$ تقع في الربع
 ⑨ إذا كانت $s = \{2,1\}, v = \{5,3\}$ فإن $(1,5) \in \dots$
 ⑩ $\{\dots\} \times \{\dots\} = \{6,8\} \times \{9,8\}$
 ⑪ إذا كان $(|s|, 4) = (3, v^2)$ والنقطة (s, v) تقع في الربع الثاني فإن

$$s + v = \dots$$

- ⑫ إذا كان $s \times v = \{(3,2), (2,2), (3,3), (2,3), (3,4), (2,4)\}$

$$\text{فإن } s \cap v = \dots$$

- ⑬ إذا كان $\{2\} \times \{s, v\} = \{(3,2), (4,2)\}$ فإن $s - v = \dots$

١٤) إذا كانت $s \supset v$ ، وكان $v = (s \times v)$ ، $6 = 4 \in s$ ، $(7, 1) \in s \times v$ فإن $s = \dots$ ، $v = \dots$

الحل

١) ١٠ ٢) $\{(5, 5)\}$ ٣) $s = 4$ ٤) محور السينات

٥) الربع الأول ٦) ٢٥ ٧) $\frac{p}{b} = \text{صفر}$ ٨) الربع الرابع

٩) $s \times v$ ١٠) $\{8\} \times \{6, 9\}$ ١١) $s + v = 1$

١٢) $s \cap v = \{3, 2\}$ ١٣) $1 \pm$ ١٤) $\{7, 4, 1\} = v$ ، $\{4, 1\} = s$

(٣) إذا كانت $s - v = \{9\}$ ، $v - s = \{7\}$ ، $s \cap v = \{4, 6\}$

أوجد: (١) s, v

(٢) $(s - v) \times s$

(٣) $(v - s) \times (s \cap v)$

الحل

(١) $s = \{9, 4, 6\}$ ، $v = \{7, 4, 6\}$

(٢) $(s - v) \times s = \{9, 4, 6\} \times \{9\} = \{(9, 9), (4, 9), (6, 9)\}$

(٣) $(v - s) \times (s \cap v) = \{9, 7, 4, 6\} \times \{7\} = \{(9, 7), (7, 7), (4, 7), (6, 7)\}$

$\{(9, 7), (7, 7), (4, 7), (6, 7)\} =$

(٤) إذا كان $(1, v) = \left(\sqrt{8-v}, \frac{s+v}{v} \right)$ أوجد قيمتي s ، v

$$v = \sqrt{8-v}$$

$$\therefore v = 2$$

$$1 = \frac{s+v}{v}$$

$$\therefore v = 2$$

$$\therefore s = 9$$

(٥) اذا كانت $P(3, 2)$ ، $B(-3, 1)$ ، $J(-1, -1)$ فعين على الشبكة التربيعية 8×8

النقط P ، B ، J ثم أكمل ما يلي :

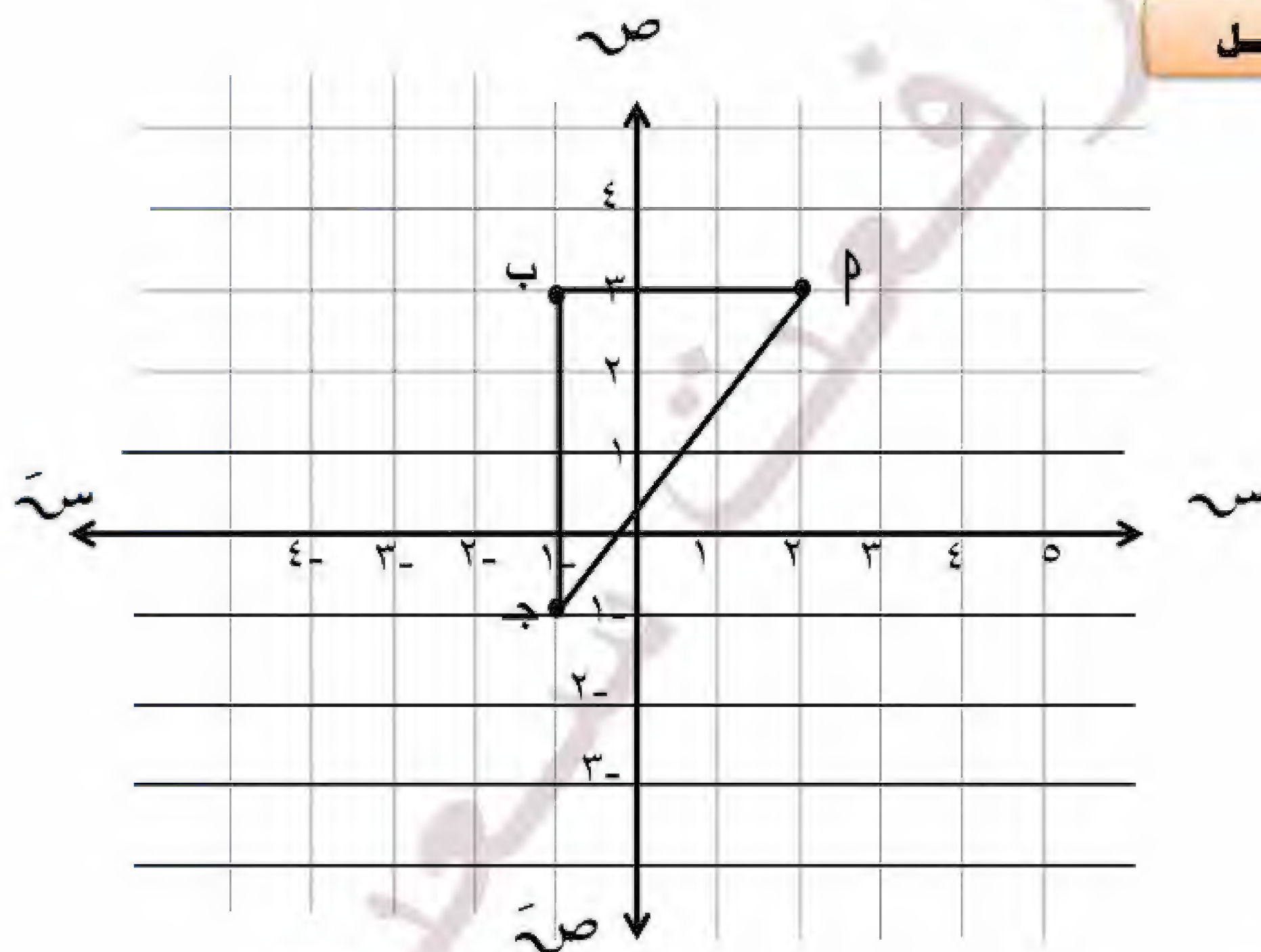
(١) $\angle PBJ = \dots\dots\dots$

(٢) الشكل PBJ يسمى $\dots\dots\dots$

(٣) محيط الشكل $PBJ = \dots\dots\dots$

(٤) مساحة الشكل $PBJ = \dots\dots\dots$

الحل



(١) $\angle PBJ = 90^\circ$

(٢) الشكل PBJ يسمى مثلث

(٣) محيط الشكل $PBJ = 3 + 4 + 5 = 12$ سم

(٤) مساحة الشكل $PBJ = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ سم^٢

(٦) اذا كان $\left(\frac{S}{ص}, ص + 2\right) = (-1, 5)$ أوجد قيمة $ص$

$ص = 3^-$ ، $ص = 3$

الحل

$\therefore ص = 3^- = (-3) = \frac{1}{27}$

(٧) إذا كانت $\sim = \{3, 2, 1\}$ ، $\sim = \{5, 3, 2\}$ ، $\sim = \{6, 4\}$ أثبت أن:

$$\sim \times \sim - (\sim \times \sim) = (\sim - \sim) \times \sim$$

الحل

$$\begin{aligned} (1) \quad & \{ (1, 6), (1, 4) \} = \{1\} \times \{6, 4\} = (\sim - \sim) \times \sim \\ & \{ (3, 6), (2, 6), (1, 6), (3, 4), (2, 4), (1, 4) \} = (\sim \times \sim) \\ & \{ (5, 6), (3, 6), (2, 6), (5, 4), (3, 4), (2, 4) \} = \sim \times \sim \\ (2) \quad & \{ (1, 6), (1, 4) \} = (\sim \times \sim) - (\sim \times \sim) \\ & \text{من (1) ، (2) نجد أن } \sim \times \sim - (\sim \times \sim) = (\sim - \sim) \times \sim \end{aligned}$$

(٨) أكمل ما يلي :

إذا كان $s \in \sim$ فإن النقطة $(-s, \sqrt{s})$ تقع في الربع

الحل تقع في الربع الرابع

(٩) بالاستعانة بشكل فن المقابل أوجد :



$$(1) \quad \sim \times (\sim - \sim)$$

$$(2) \quad \sim \times (\sim \cap \sim)$$

$$(3) \quad \sim \times (\sim - \sim)$$

الحل

$$(1) \quad \{ (2, 3), (1, 3) \} = \{2, 1\} \times \{3\} = \sim \times (\sim - \sim)$$

$$(2) \quad \{7, 5\} \times \{2, 1\} = (\sim \cap \sim) \times \sim$$

$$\{ (7, 2), (5, 2), (7, 1), (5, 1) \} =$$

$$(3) \quad \{9, 7, 5\} \times \{2, 1\} = \sim \times (\sim - \sim)$$

$$\{ (9, 2), (7, 2), (5, 2), (9, 1), (7, 1), (5, 1) \} =$$

١٠ إذا كان $\{1, 4\} = P$ ، $\{2, 4\} = B$ ، $\{0, 1\} = J$ أوجد :

$$١ \quad (B \times P) \cap (B \times J) \quad ٢ \quad (B \cup P) \times (B \cup J)$$

$$٣ \quad (B - P) \times J \quad ٤ \quad (B \cap P) \times (B \cap J)$$

الحل

$$١ \quad \{(4, 4), (2, 4), (4, 1), (2, 1)\} = \{4, 2\} \times \{4, 1\} = (B \times P)$$

$$\{(0, 4), (1, 4), (0, 2), (1, 2)\} = \{0, 1\} \times \{4, 2\} = (J \times B)$$

$$\emptyset = (J \times B) \cap (B \times P)$$

$$٢ \quad \{4, 2, 1\} = (B \cup P)$$

$$\{0, 4, 2, 1\} = (B \cup J)$$

$$\{0, 4, 2, 1\} \times \{4, 2, 1\} = (B \cup J) \times (B \cup P)$$

$$\{(0, 4), (4, 4), (2, 4), (1, 4), (0, 2), (4, 2), (2, 2), (1, 2), (0, 1), (4, 1), (2, 1), (1, 1)\} =$$

$$٣ \quad \{1\} = (B - P)$$

$$\{(0, 1), (1, 1)\} = \{0, 1\} \times \{1\} = J \times (B - P)$$

$$٤ \quad \{4\} = (B \cap P) \quad \emptyset = (J \cap B)$$

$$\emptyset = \emptyset \times \{4\} = (J \cap B) \times (B \cap P)$$

١١ إذا كانت $\{0, 2\} = S$ ، $\{4, 2\} = V$ ، $\{6, 4\} = E$ أوجد :

$$١ \quad S \cup ((V \cup E) \times S) \quad ٢ \quad (S - V) \times (E \cap V)$$

الحل

$$١ \quad S \cup E = \{6, 4, 2\} \quad S \cup (V \cup E) = \{6, 4, 2\} \times \{0, 2\}$$

$$٦ = ((V \cup E) \times S) \cup S$$

$$٢ \quad \{(4, 0)\} = \{4\} \times \{0\} = (V \cap E) \times (S - V)$$

١٢) اذا كانت $\{٤,٣\} = \text{سه}$ ، $\{٥,٤\} = \text{صه}$ ، $\{٥,٦\} = \text{ع}$ ، أوجد:

١) $\text{سه} \times (\text{صه} \cap \text{ع})$ ٢) $\text{ع} \times (\text{سه} - \text{صه})$ ٣) $(\text{سه} - \text{صه}) \times (\text{ع} - \text{صه})$

الحل

١) $\{٥,٤\} \times \{٤,٣\} = \{٥\} \times \{٤,٣\} = (\text{ع} \cap \text{صه}) \times \text{سه}$

٢) $\{٥,٣\} \times \{٦,٣\} = \{٥,٦\} \times \{٣\} = \text{ع} \times (\text{سه} - \text{صه})$

٣) $\{٤,٣\} = \{٤\} \times \{٣\} = (\text{ع} - \text{صه}) \times (\text{سه} - \text{صه})$

١٣) اذا كانت $\text{سه} \times \text{صه} = \{(٥,١), (٣,١), (١,١)\}$ أوجد:

١) سه ، صه ٢) $\text{صه} \times \text{سه}$ ٣) صه^2

الحل

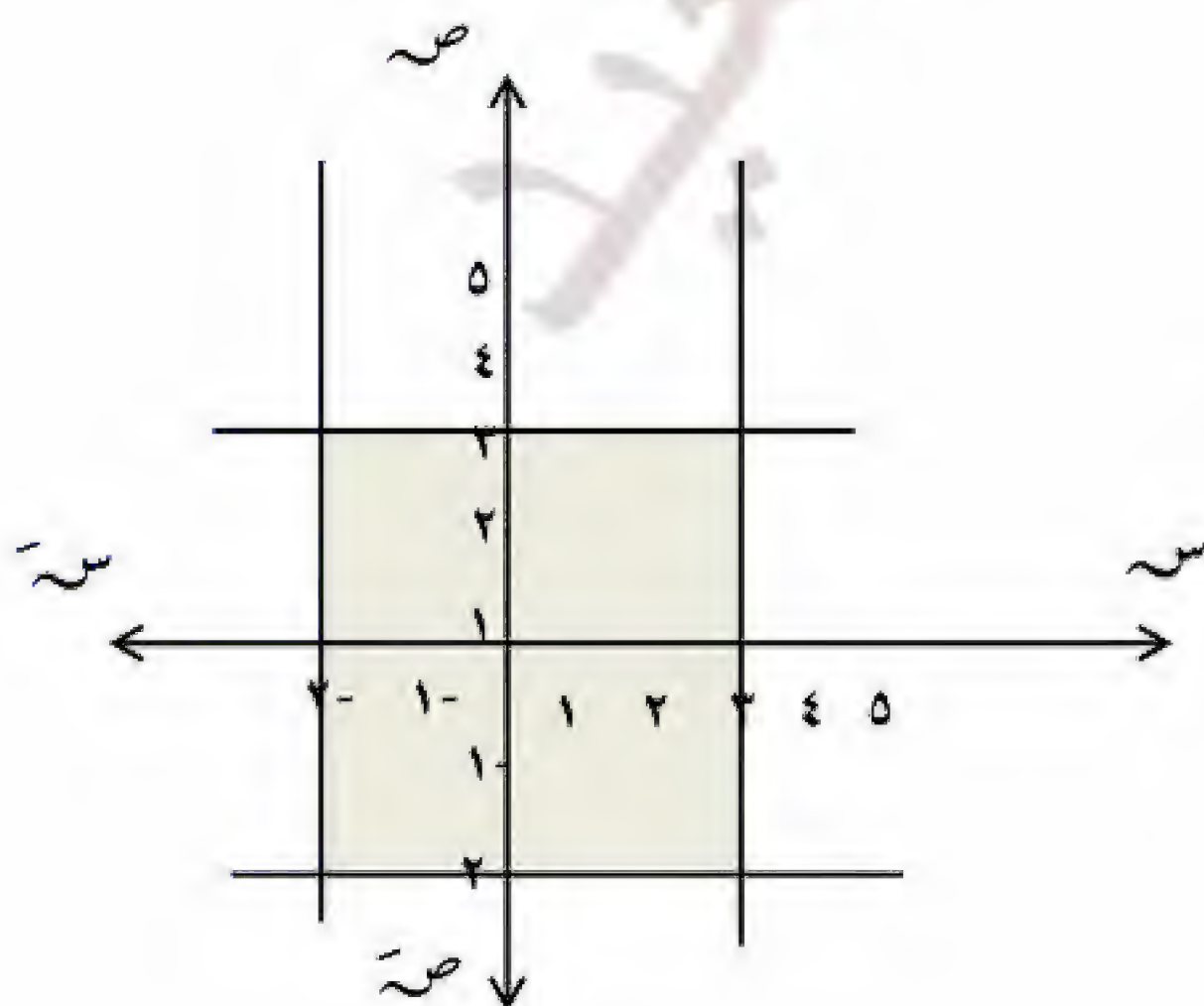
١) $\{١\} = \text{سه}$ ، $\{٥,٣,١\} = \text{صه}$ ٢) $\text{صه} \times \text{سه} = \{(١,٥), (١,٣), (١,١)\}$

٣) $\text{صه}^2 = \{(٥,٥), (٣,٥), (١,٥), (٥,٣), (٣,٣), (١,٣), (٥,١), (٣,١), (١,١)\}$

١٤) اذا كانت $\text{سه} = [-٢, ٣]$ أوجد المنطقة التي تمثل $\text{سه} \times \text{سه}$ ثم بين أى من النقاط التالية تنتمى الى الحاصل الديكارتي $\text{سه} \times \text{سه}$

م) $(٢, ١)$ ، ب) $(١-, ٣)$ ، ج) $(٤, ١-)$ ، د) $(٠, ٢-)$

الحل



م) $(٢, ١) \in \text{سه} \times \text{سه}$

ب) $(١-, ٣) \in \text{سه} \times \text{سه}$

ج) $(٤, ١-) \notin \text{سه} \times \text{سه}$

د) $(٠, ٢-) \in \text{سه} \times \text{سه}$

العلاقات

العلاقة من مجموعة S الى مجموعة V هي ارتباط يربط بعض او كل عناصر S ببعض او كل عناصر V

ملاحظات

* العلاقة E من S الى V تكون مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي $S \times V$

* اذا كان $(p, b) \in E$ فاننا نكتب pEb

* بيان E هو مجموعة من الأزواج المرتبة التي مسقطها الاول ينتمى الى المجموعة S ومسقطها الثانى ينتمى الى المجموعة V ويرتبط المسقط الاول فى كل منها بالمسقط الثانى بهذه العلاقة

* اذا كانت العلاقة E من S الى S فاننا نقول ان E علاقة على S ويكون

$$E \subseteq S \times S$$

تمارين محلولة

(١) اذا كانت $S = \{١, ٢, ٣\}$ ، $V = \{٣, ٤, ٥\}$ بين مع ذكر السبب ايا

مما يأتى يمثل علاقة من S الى V

$$١ \quad L = \{(٣, ٥), (٣, ٣), (٣, ١)\}$$

$$٢ \quad M = \{(٤, ٢), (٣, ١), (٣, ٣), (٤, ٣)\}$$

الحل

$$١ \quad L \text{ لا تمثل علاقة لأن } L \not\subseteq S \times V$$

$$٢ \quad M \text{ تمثل علاقة لأن } M \subseteq S \times V$$

(٢) اذا كانت E علاقة على P حيث P مجموعة الاعداد الطبيعية وكانت pEb تعنى أن " $p \times b = ١٢$ " لكل $p, b \in P$ أكمل ما يلى :

- (١) اذا كان $p \in \mathbb{N}$ فإن $p = 1, 2, 3, \dots$
 (٢) اذا كان $p \in \mathbb{N}$ فإن $p = 1, 2, 3, \dots$
 (٣) اذا كان $(p, 3) \in \mathbb{N} \Rightarrow p \in \mathbb{N}$ اذا كان $\frac{1}{3} p \in \mathbb{N}$ فإن $p = 3, 6, 9, \dots$
 (٥) اذا كان $(p, \frac{3}{4} p) \in \mathbb{N} \Rightarrow p \in \mathbb{N}$ فإن $p = 4, 8, 12, \dots$

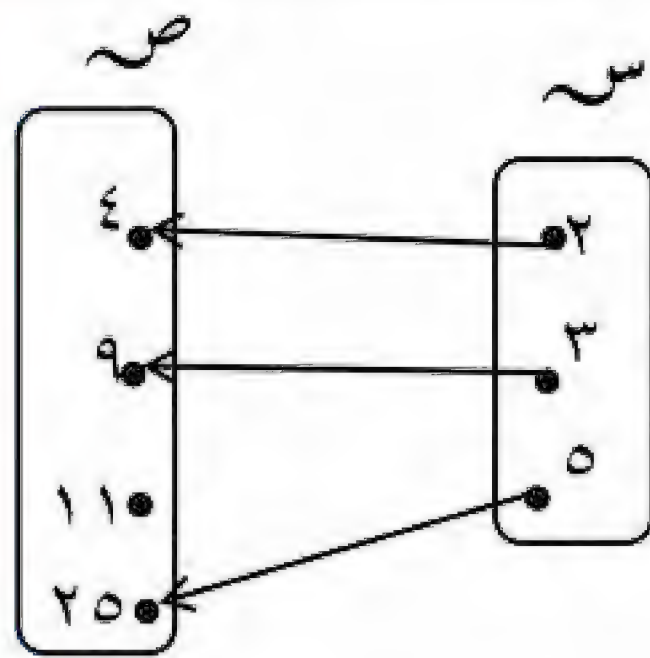
الحل

$$3 = p(1) \quad 2 = p(2) \quad 2 = p(3) \quad 6 = p(4) \quad 4 = p(5)$$

(٣) اذا كانت $\sim = \{3, 5, 7, 9\}$ ، $\sim = \{p \in \mathbb{N} : p \geq 10\}$ وكانت \sim علاقة من \sim الى \sim بيانه كالاتى: $\sim = \{(3, 9), (5, 7), (2, 5), (1, 3)\}$
 اكتب قاعدة العلاقة \sim

الحل

قاعدة العلاقة هي: $\sim = \{p \in \mathbb{N} : p \geq 10\}$ ، $\sim = \{p \in \mathbb{N} : p \geq 10\}$



(٤) فى الشكل المقابل

\sim علاقة من \sim الى \sim

١ اوجد $\sim(\sim \times \sim)$

٢ اكتب بيان \sim

٣ اكتب ما تعنيه العلاقة \sim ب حيث $\sim \Rightarrow \sim$ ، $\sim \Rightarrow \sim$

الحل

$$1 \sim (\sim \times \sim) = 3 \times 4 = 12$$

$$2 \text{ بيان } \sim = \{(2, 4), (3, 9), (5, 20)\}$$

$$3 \text{ } \sim \text{ ب تعنى أن } \sim = 2 \text{ ب لكل } \sim \Rightarrow \sim, \sim \Rightarrow \sim$$

(٥) اذا كانت \sim علاقة على مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة \sim^+ حيث $\sim \in \sim$

تعنى ان " $\sim = 2 \sim$ " لكل $\sim \in \sim^+$ ، $\sim \in \sim^+$

اذا كان كل من الأزواج المرتبة التالية ينتمى لبيان \sim : $(2, 4)$ ، $(\frac{2}{9}, 3)$ ، $(3, 9)$ ،

$(\frac{9}{32}, 5)$ أوجد قيمة \sim ، \sim ، \sim ، \sim

الحل

$$\frac{3}{4} = \text{د} ، \quad \text{ج} = 5, 4 ، \quad \frac{2}{3} = \text{ب} ، \quad 2 = \text{ا}$$

(٦) اذا كانت $\text{س} = \{2, 4, 6, 8\}$ ، $\text{ص} = \{3, 5, 6\}$ ، $\text{ل} = \{4, 5, 7\}$ أكمل مكان النقط بالمجموعة المناسبة :

١ $\{2, 3\}, \{6, 5\}$ علاقة من الى

٢ $\{3, 7\}, \{5, 5\}$ علاقة من الى

٣ $\{4, 8\}, \{5, 2\}$ علاقة من الى

٤ $\{5, 8\}, \{6, 2\}$ علاقة من الى

الحل

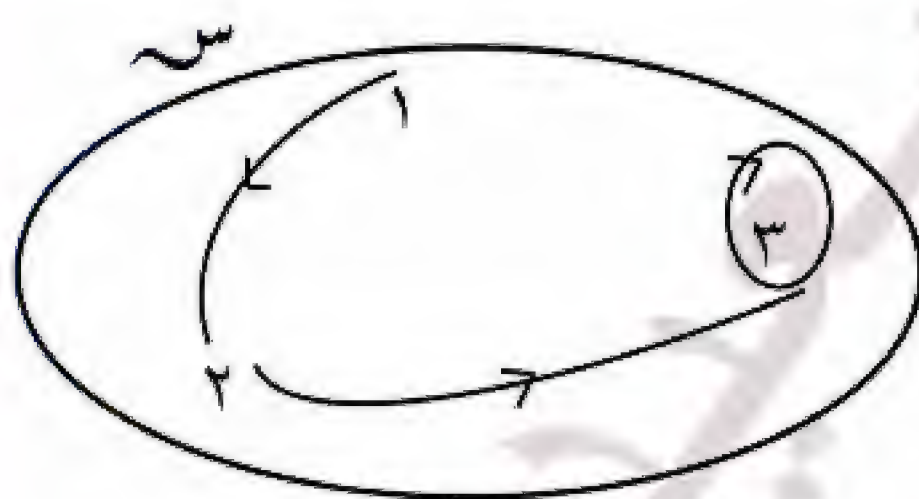
١ علاقة من س الى ص

٢ علاقة من ص الى ل

٣ علاقة من ل الى س

٤ علاقة من ص الى س

(٧) الشكل المقابل يمثل مخططا سهميا للعلاقة ع



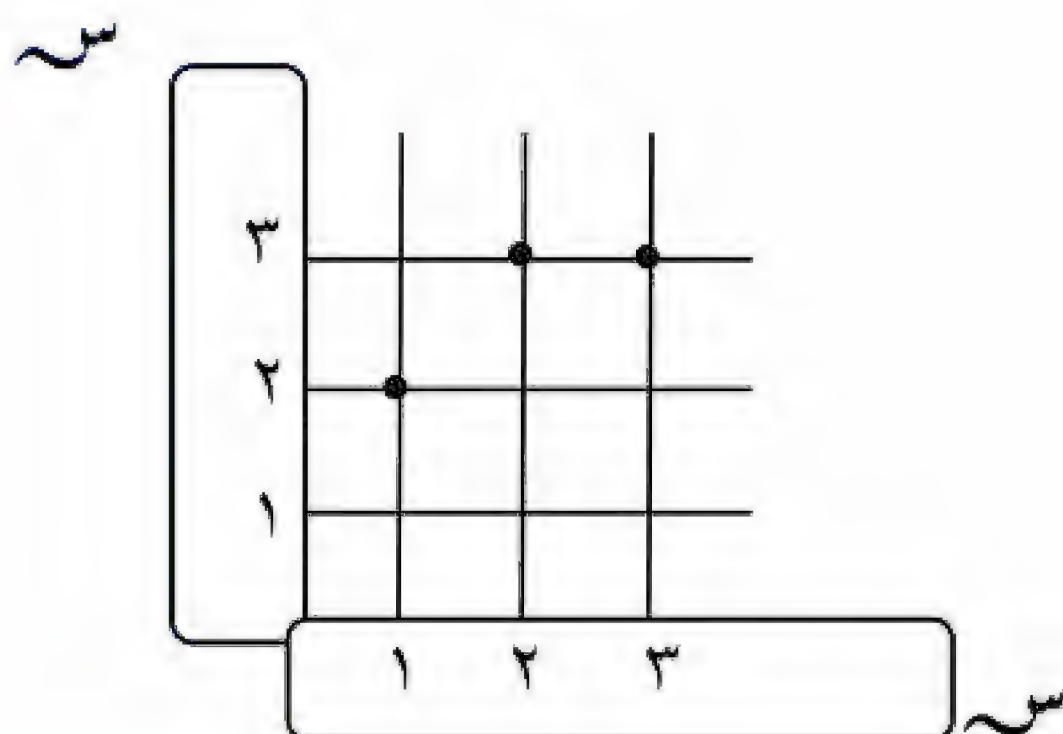
المعرفة على المجموعة

$\text{س} = \{1, 2, 3\}$ اكتب بيان ع ومثلها

بمخطط بياني

الحل

بيان ع $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}$



(٨) اذا كانت $\sim = \{1, 0, 1\}$ وكانت \sim علاقة المعكوس الجمعى على \sim ، \sim علاقة

المعكوس الضربى على \sim اوجد $\sim \cap \sim = \sim$

الحل

$$\sim = \{(1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$$

$$\sim = \{(1, 1), (1, 1)\}$$

$$\sim = \sim \cap \sim = \sim$$

(٩) اذا كانت $\sim = \{10, 13, 4, 5, 3\}$ ، $\sim = \{5, 7, 8, 9, 19, 25, 4\}$ وكانت \sim علاقة من

\sim الى \sim حيث \sim ب تعنى ان " $\sim = 1 - \sim$ " لكل $\sim \in \sim$ ، $\sim \in \sim$

١ اكتب بيان \sim ٢ مثل \sim بمخطط سهمى

٣ اذا كان $\frac{1}{\sim}$ ك \sim ١٩ فأوجد قيمة ك ٤ ما قيمة \sim اذا كان \sim (٩، \sim) بيان العلاقة \sim

الحل

١ بيان $\sim =$

$$\{(25, 13), (19, 10), (7, 4), (9, 5), (5, 3)\}$$

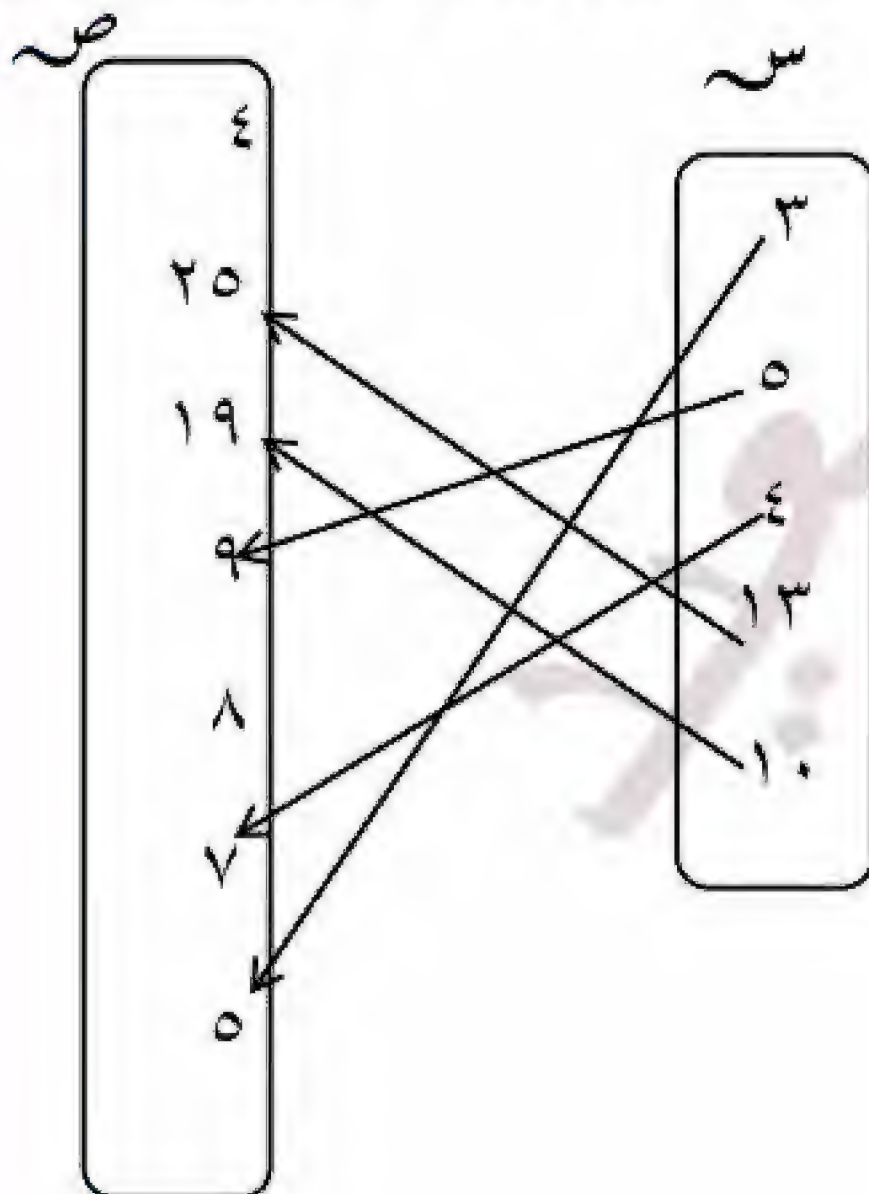
$$\textcircled{3} \because \frac{1}{\sim} \text{ ك } \sim 19$$

$$19 = 1 - \frac{1}{\sim} \times 2$$

$$\text{ك} = 1 - 19 = 20$$

٤ \therefore (٩، \sim) بيان العلاقة \sim

$$\therefore \sim = 5$$



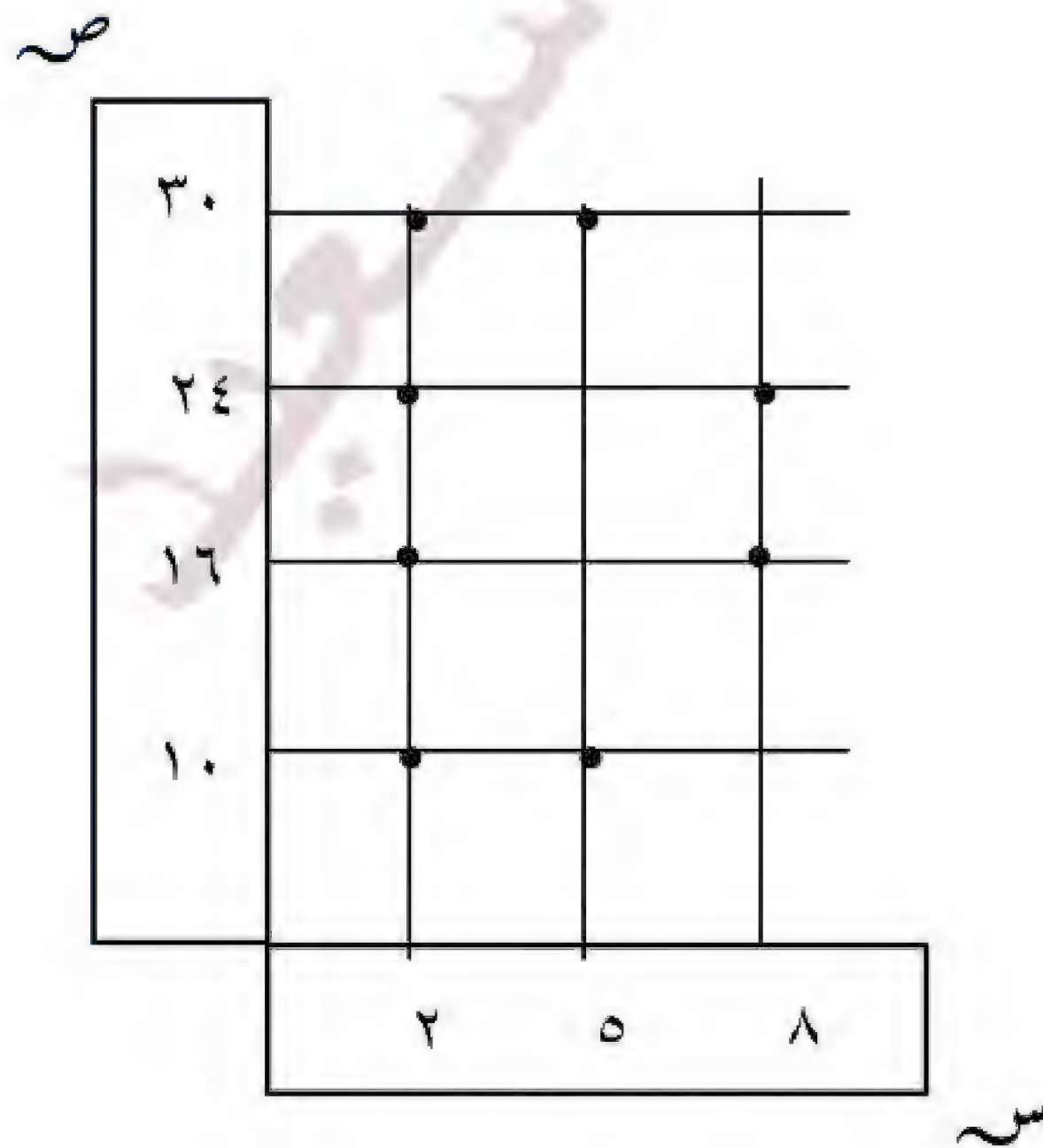
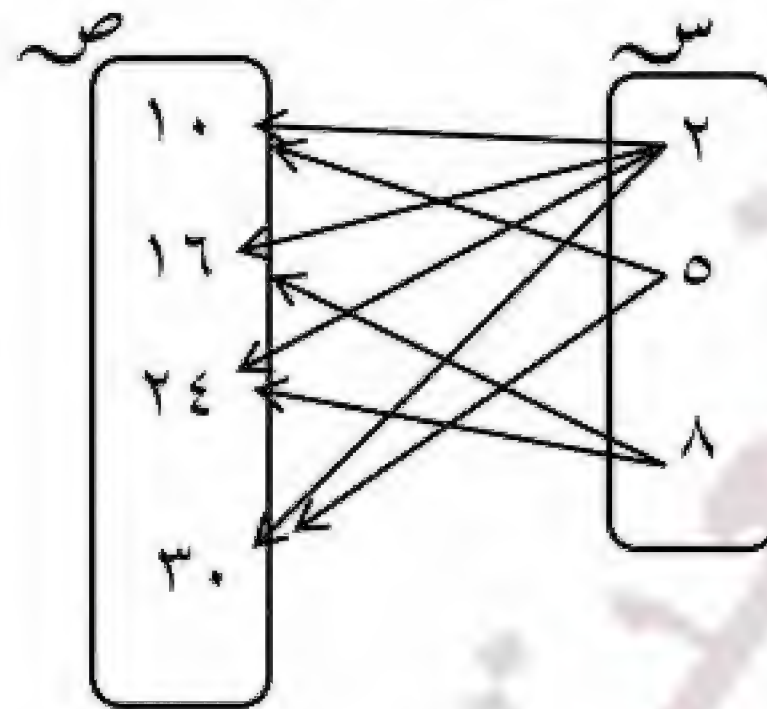
١٠) اذا كانت $\tilde{s} = \{2, 5, 8\}$ ، $\tilde{v} = \{10, 16, 24, 30\}$ وكانت \tilde{v} علاقة من \tilde{s}

الى \tilde{v} حيث " \tilde{v} عرب " تعنى ان " \tilde{v} عامل من عوامل ب " لكل $\tilde{v} \in \tilde{s}$ ، ب $\in \tilde{v}$

اكتب بيان \tilde{v} ومثلها بمخطط سهمى واخر بياني

الحل

$\tilde{v} = \{(2, 10), (2, 16), (2, 24), (2, 30), (5, 16), (5, 24), (5, 30), (8, 10), (8, 16), (8, 24), (8, 30)\}$



الدالة

يقال لعلاقة من S الى V انها دالة اذا تحققت احدى الحالات الاتية:

① فى بيان العلاقة: كل عنصر من عناصر S يظهر مرة واحدة فقط كمسقط اول فى احد الأزواج المرتبة التى تنتمى الى بيان العلاقة

② فى المخطط السهمى: كل عنصر من عناصر S يخرج منه سهم واحد فقط

③ فى المخطط البيانى: كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة

ملاحظات

اذا كانت D دالة من المجموعة S الى المجموعة V فإن:

* المجموعة S تسمى مجال الدالة

* المجموعة V تسمى المجال المقابل للدالة

* مجموعة صور عناصر مجموعة المجال S بالدالة D تسمى مدى الدالة

تمارين محلولة

① اذا كانت $S = \{-2, 0, 2\}$ ، $V = \{3, 7, K\}$ وكانت E دالة من S الى V حيث $p \in B$ تعنى ان " $p = 2 - 1$ " لكل $p \in S$ ، $B \in V$. أوجد قيمة K ومثل الدالة بمخطط سهمى

الحل

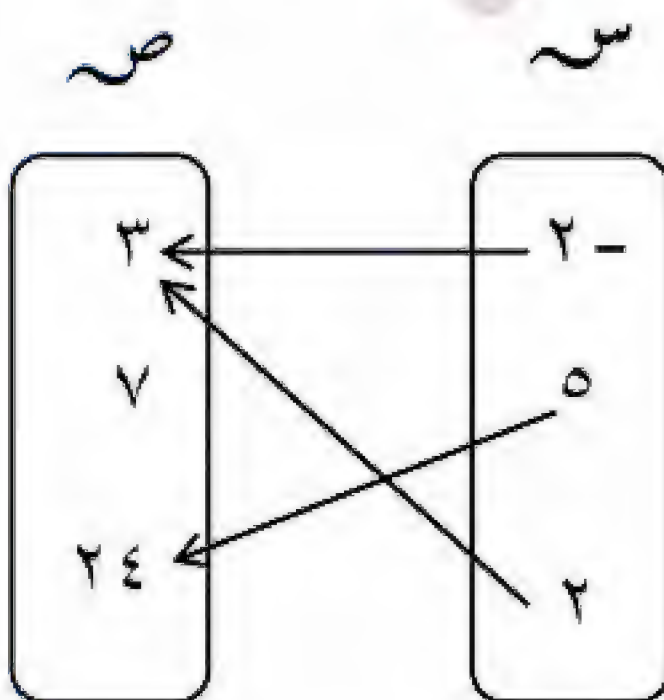
لكى تكون E دالة من S الى V يجب أن يكون

كل عنصر من S له صورة وحيدة فى V

$\therefore -2$ صورتها 3 ، 0 صورتها 7

\therefore يجب ان تكون 5 صورتها 24

$\therefore K = 24$



٢) إذا كانت $\sim = \{1, 3, 5\}$ وكانت \mathcal{C} دالة على \sim وكان بيان $\mathcal{C} = \{(3, p), (b, 1)\}$ ،
 $(5, 1)$ فأوجد القيمة العددية للمقدار $p+b$

الحل

∴ \mathcal{C} دالة على \sim

∴ يجب أن يكون كل عنصر في \sim يظهر كمسقط أول مرة واحدة في بيان \mathcal{C}

$$\therefore 3 = p, \quad 5 = b \quad \text{أو} \quad 5 = p, \quad 3 = b$$

$$\therefore 8 = 5 + 3 = p + b$$

٣) إذا كان بيان الدالة $\mathcal{D} = \{(11, 5), (9, 4), (7, 3), (5, 2), (3, 1)\}$

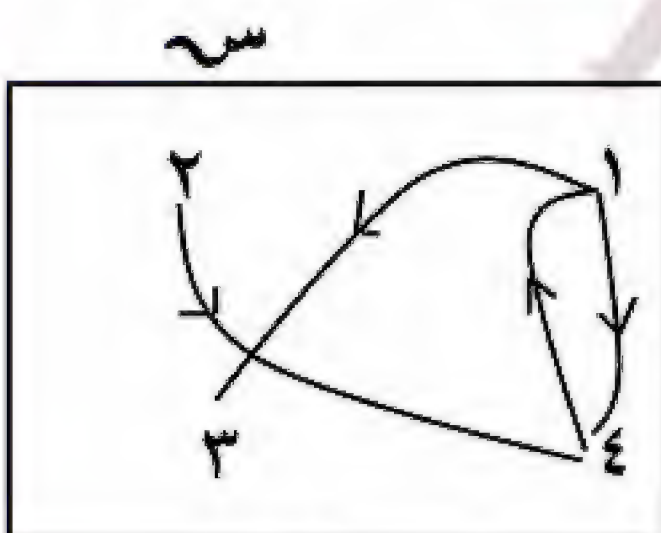
١) اكتب كلا من مجال ومدى الدالة \mathcal{D} ٢) اكتب قاعدة الدالة \mathcal{D}

الحل

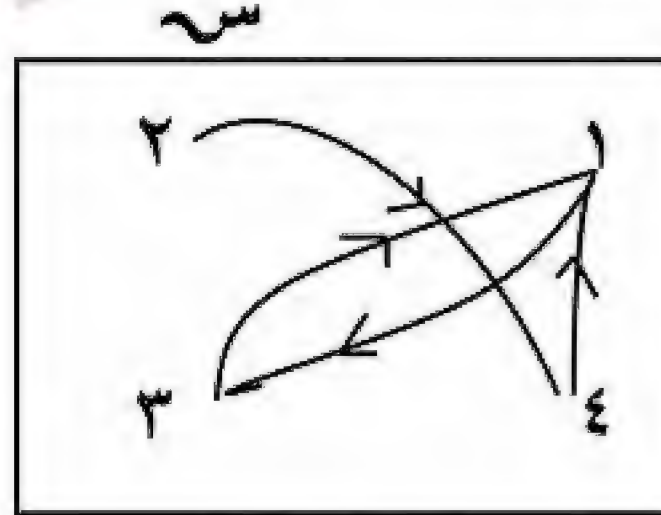
١) المجال $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ المدى $= \{3, 5, 7, 9, 11\}$

٢) قاعدة الدالة \mathcal{D} (س) $= 2s + 1$

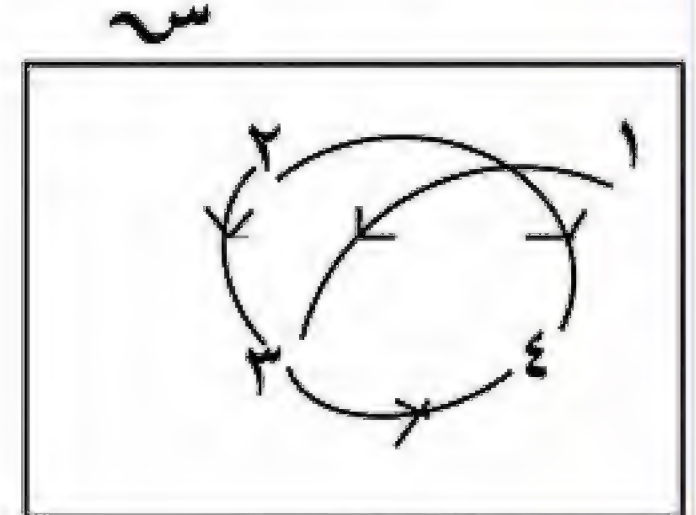
٤) إذا كانت $\sim = \{1, 2, 3, 4\}$ فأى من المخططات التالية تكون دالة على المجموعة \sim



٣



٢



١

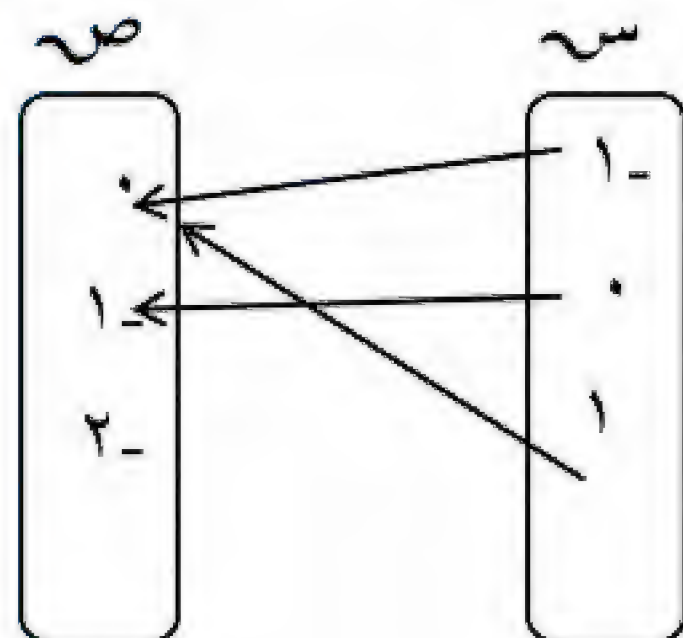
الحل

المخطط رقم ٢ يمثل دالة

٥) إذا كانت $\sim = \{1, 0, 1-\}$ ، $\sim = \{2-, 1-, 0\}$ وكانت الدالة \leftarrow \sim

حيث $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = 1 - 2$ أوجد بيان الدالة \mathcal{D} ومثلها بمخطط سهمي واكتب مداها

الحل



$$\mathcal{D}(1-) = 1 - 2(1-) = 0$$

$$\mathcal{D}(0) = 1 - 2(0) = 1-$$

$$\mathcal{D}(1) = 1 - 2(1) = 2-$$

\therefore بيان الدالة $\mathcal{D} = \{(1-, 0), (0, 1-), (1, 2-)\}$

مدى الدالة $\mathcal{D} = \{1-, 0\}$

٦) إذا كانت $\sim = \{4, 3, 2\}$ ، $\sim = \{8, 7, 6, 5, 4, 3\}$ وكانت $\mathcal{D} : \sim \leftarrow$ \sim

حيث $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = 9 - \mathcal{S}$ أوجد صور عناصر \sim بالدالة \mathcal{D}

الحل

$$\mathcal{D}(2) = 9 - 2 = 7, \quad \mathcal{D}(3) = 9 - 3 = 6, \quad \mathcal{D}(4) = 9 - 4 = 5$$

٧) إذا كانت $\sim = \{6, 4, 2\}$ وكانت الدالة $\mathcal{D} : \sim \leftarrow \mathcal{E}$ ، $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = 2\mathcal{S} + 3$

أوجد مدى الدالة \mathcal{D}

الحل

مدى الدالة $\mathcal{D} = \{15, 11, 7\}$

٨) إذا كان $(p, p) \in \mathcal{D}$ بيان الدالة \mathcal{D} حيث $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = 2\mathcal{S} + 3$ أوجد قيمة p

الحل

$$p = 2p + 3$$

$$3 - p = 2p - 3 \Rightarrow p = 3$$

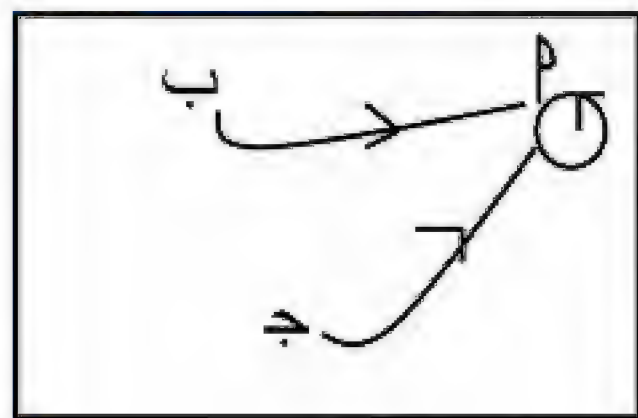
٩) أكمل ما يلي :

- ١) إذا كانت د دالة حيث د: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ فإن \mathbb{R} تسمى \mathbb{R} ، \mathbb{R} تسمى
 ٢) إذا كانت د دالة من المجموعة \mathbb{R} الى المجموعة \mathbb{R} فإن مدى الدالة د يكون $\mathbb{R} \supset \dots$

٣) إذا كانت ع دالة من \mathbb{R} الى \mathbb{R} حيث $\mathbb{R} = \{2, 5, 8\}$ ، $\mathbb{R} = \{3, 5\}$
 وكانت ع $= \{(3, 2), (3, 5), (3, 8)\}$ فإن $\mathbb{R} = \dots$

٤) إذا كانت ع دالة بيانها $\{(3, 1), (5, 2), (7, 4)\}$ فإن مداها $= \dots$

س



٥) الشكل المقابل يمثل دالة على \mathbb{R} مداها

٦) إذا كانت $(m, 13) \in \text{بيان الدالة د حيث : د(س) = 3س + 4}$ فإن $m = \dots$

٧) إذا كانت \mathbb{R} مجموعة الأعداد الحقيقية وكانت ع علاقة على \mathbb{R} بحيث

$(p, b) \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{كان } p = 2b$ وكانت الأزواج الآتية تنتمي الى ع فاكتب الناقص منها :

$(1, \dots), (\dots, 5-), (\sqrt{2}, \dots), (\dots, 4), (\dots, 7)$

الحل

١) \mathbb{R} تسمى المجال، \mathbb{R} تسمى المجال المقابل

٣) $\mathbb{R} = 8$

٢) مدى الدالة د يكون $\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$

٥) مدى الدالة $= \{p\}$

٤) مدى الدالة $= \{3, 5, 7\}$

٦) $m = 3$

٧) $(1, 1), (5-, 25), (\sqrt{2}, 2), (2\pm, 4), (7\pm, 7)$

⑩ إذا كانت E دالة من S إلى S حيث $P \in E$ تعني أن " P تقسم B " لكل

$P \in S$ ، $B \in S$ وإذا كان : $S \cup S = \{3, 5, 11, 14, 9, 35, 2\}$ وكان

$S = (S) = 3$ ، $S \times S = 12$ اوجد كلا من S ، S ثم اكتب بيان

الدالة E واوجد مداها ؟

الحل

∴ تقسم B (ب تقبل القسمة على P بدون باق)

، ∴ $S \cup S = \{3, 5, 11, 14, 9, 35, 2\}$ ، E دالة

∴ تقسم 14 ، 3 تقسم 9 ، 5 تقسم 35

∴ $S = (S) = 3$ ∴ $S = \{5, 3, 2\}$

∴ $S \times S = 12$ ∴ $S = \{11, 35, 9, 14\}$

$E = \{(35, 5), (9, 3), (14, 2)\}$ ومداها $\{9, 35, 14\}$

⑪ إذا كانت $D: S \rightarrow S$ ، $P \in E$ تعني أن " P مضاعف B " لكل $P \in S$ ، $B \in S$

S ، وكان $S = (S) = 4$ ، $S \times S = 2$ ، وكان $S \cup S = \{27, 9, 8, 4\}$

اوجد كلا من S ، S واكتب بيان الدالة D ثم اوجد المجال المقابل والمدى

الحل

$S = \{4, 9, 27, 8\}$

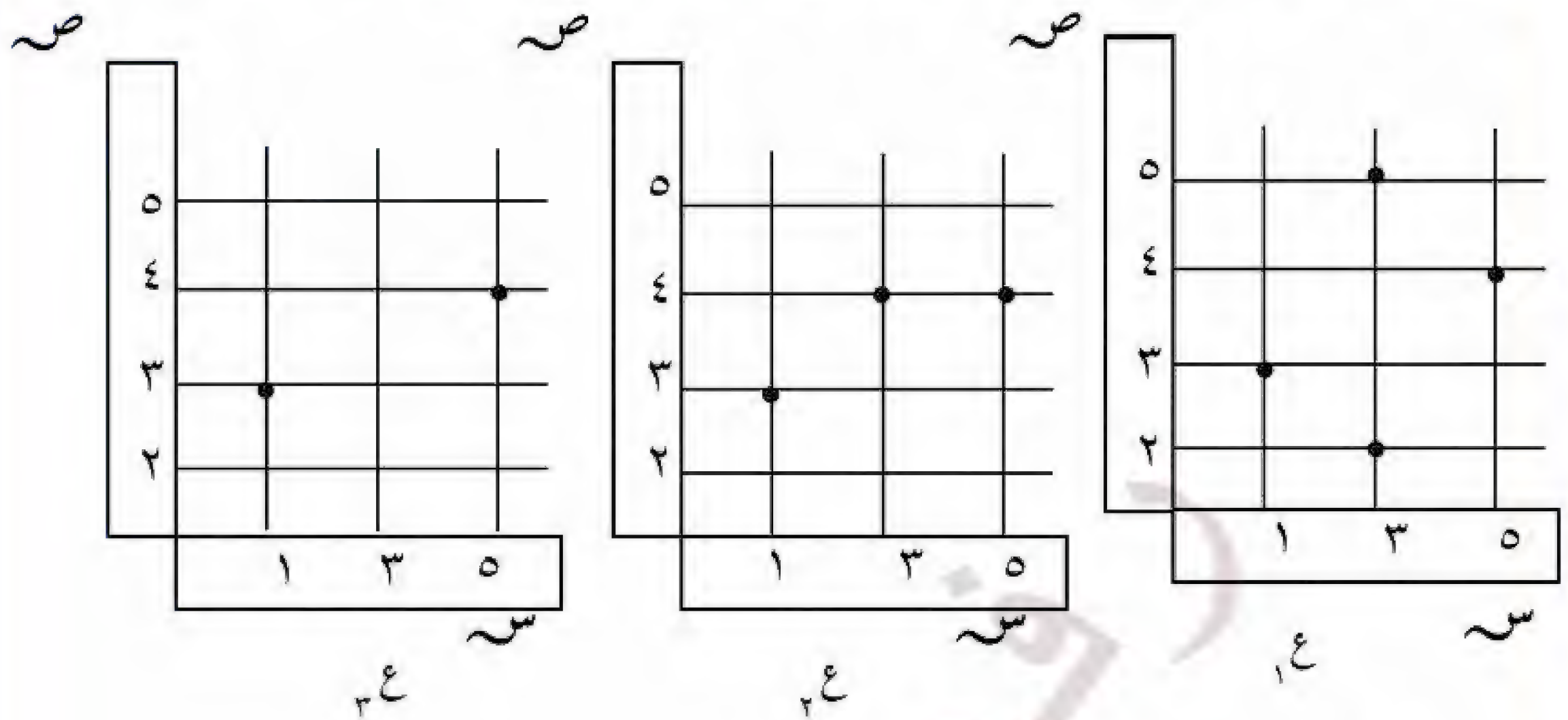
$S = \{9, 4\}$

بيان الدالة $D = \{(9, 27), (9, 9), (4, 4), (4, 8)\}$

المجال المقابل $\{4, 9\}$

المدى $\{4, 9\}$

١٢) بين أى المخططات الآتية يعبر عن دالة وإذا كانت دالة اذكر مداها



الحل

٢ع دالة لأن كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط ومداها $\{3, 4\}$

١٣) إذا كانت $س = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $ص = \{1, 3, 5, 7\}$ فبين أى العلاقات الآتية تمثل دالة من $س$ الى $ص$ وإذا كانت دالة اذكر مداها

$$١ع = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$$

$$٢ع = \{(1, 4), (5, 2), (7, 1)\}$$

$$٣ع = \{(1, 4), (5, 1), (3, 3), (7, 2)\}$$

الحل

١ع ليست دالة لأن العنصر ٣ ظهر كمسقط أول مرتين

٢ع ليست دالة لأن العنصر ٣ لم يظهر كمسقط أول فى أى من الأزواج المرتبة

التي تمثل العلاقة

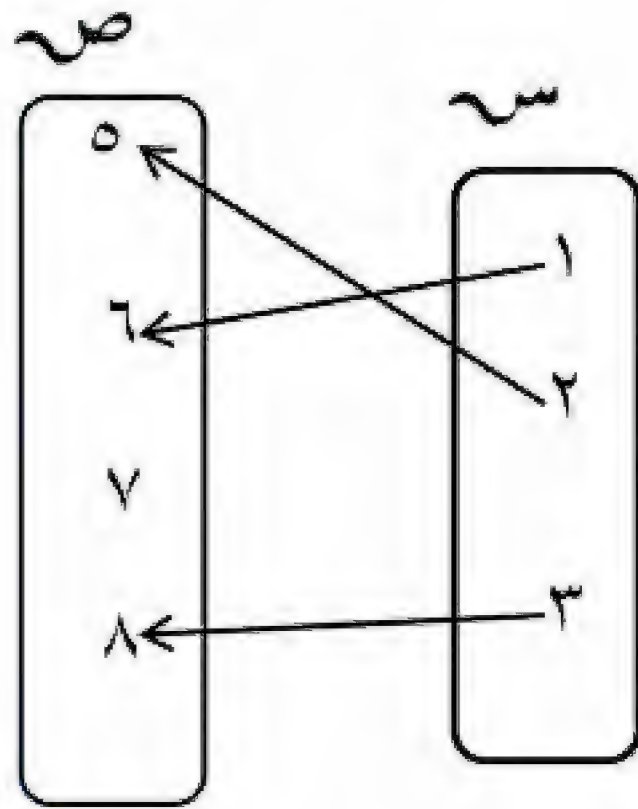
٣ع دالة ، لأن كل عنصر من عناصر $س$ ظهر مرة واحدة فقط كمسقط أول

$$\text{مدى الدالة} = \{1, 3, 5, 7\}$$

١٤) اذا كانت $\sim = \{3, 2, 1\}$ ، $\sim = \{8, 7, 6, 5\}$ وكانت ع علاقة من \sim

الى \sim حيث $p \in \sim$ تعنى أن " $p + b =$ عددا أوليا " لكل $p \in \sim$ ، $b \in \sim$

اكتب بيان ع ، ومثلها بمخطط سهمي ، هل ع دالة أم لا ؟ ولماذا ؟ ، واذا كانت دالة اكتب المدى



الحل

بيان ع = $\{(8, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر

\sim خرج منه سهم واحد فقط الى

احد عناصر \sim

المدى = $\{8, 5, 6\}$

١٥) اذا كانت $\sim = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، $\sim = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 4\}$

وكانت ع علاقة من \sim الى \sim حيث $p \in \sim$ تعنى أن " $p^2 = b$ " لكل $p \in \sim$

، $b \in \sim$ اكتب بيان ع ثم اذكر هل ع دالة أم لا ؟ واذا كانت دالة اكتب المدى

الحل

ع = $\{(-2, \frac{1}{4}), (-1, \frac{1}{2}), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

ع دالة لأن كل عنصر من عناصر \sim ظهر مرة واحد فقط كمسقط أول في

بيان ع.

المدى = $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, 1, 4\}$

١٦) اذا كانت $\sim = \{س:س \supset ط, ١ \geq س \geq ٣\}$ وكانت ع علاقة على \sim حيث

$٢ \in ب$ تعنى أن " $٢ + ب$ تقبل القسمة على ٣" لكل $٢ \in س, ب \in س$

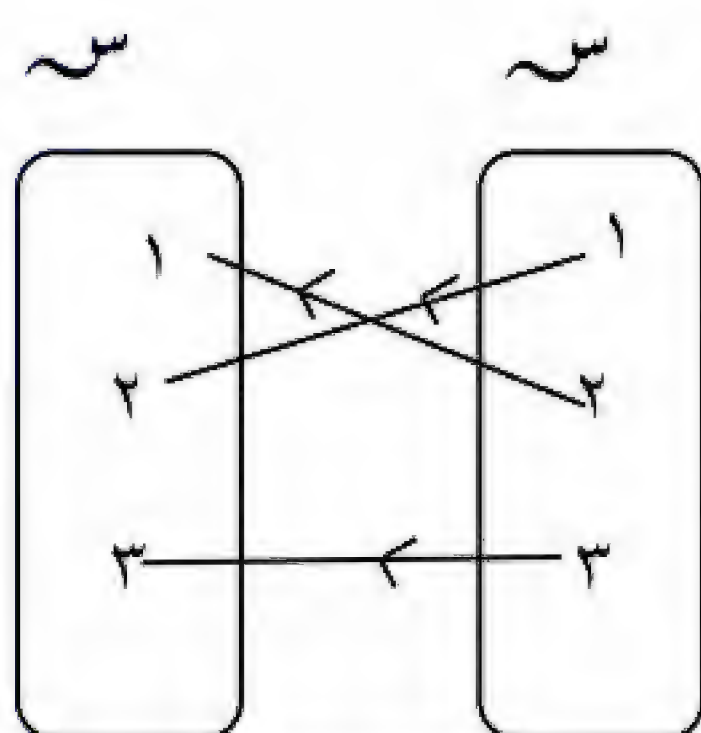
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى ثم بين هل ع دالة أم لا

الحل

$$\sim = \{١, ٢, ٣\}$$

$$ع = \{(١, ٢), (٢, ١), (٣, ٣)\}$$

ع دالة



١٧) اذا كانت $\sim = \{س:ب \supset ط, ٣ \geq ب > ١٠\}$ وكانت ع علاقة

من \sim الى \sim حيث $٢ \in ب$ تعنى أن " $٢ = \frac{١}{٣} ب$ " لكل $٢ \in س, ب \in س$

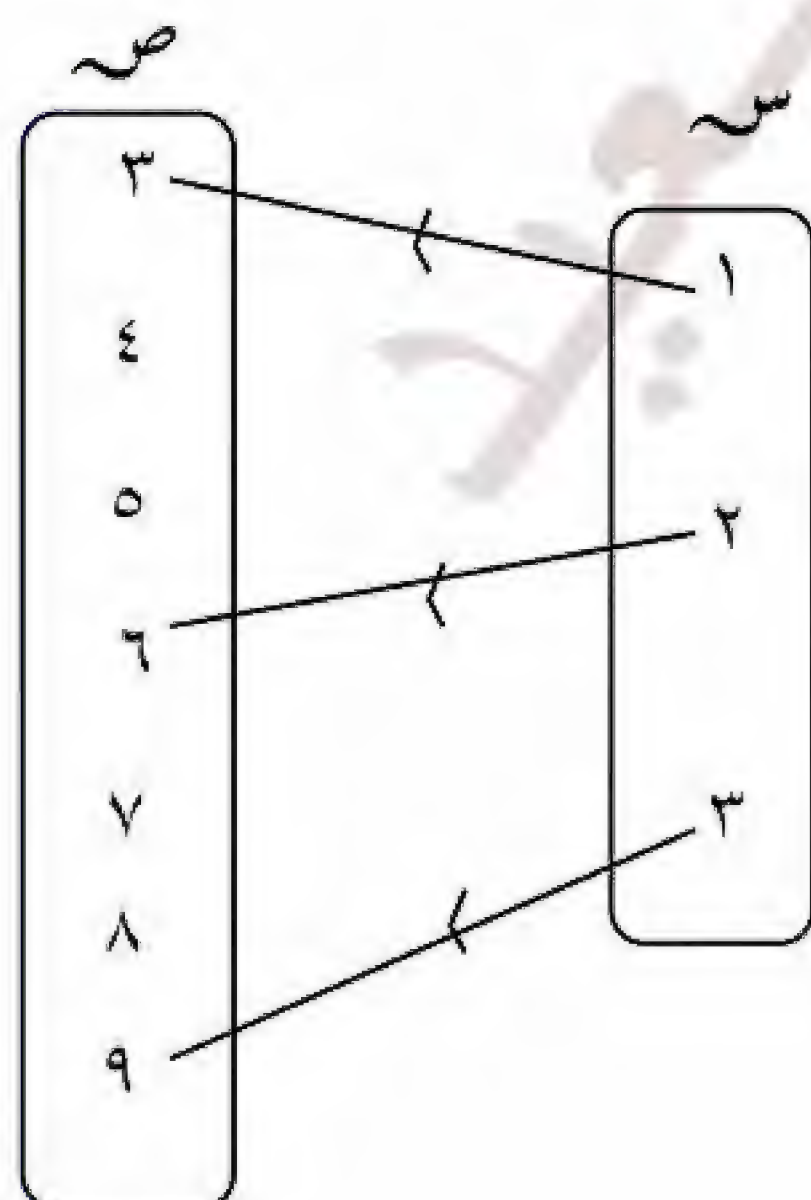
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى ثم بين هل ع دالة أم لا ؟ وان كانت دالة اذكر المدى

الحل

$$\sim = \{٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩\}$$

$$بيان = \{(١, ٣), (٢, ٦), (٣, ٩)\}$$

$$المدى = \{٣, ٦, ٩\}$$



١٨ إذا كانت $s = \{0, 1, 2, 3\}$ ، $v = \{0-, 1-, 2-, 3-\}$ وكانت e علاقة من

s إلى v حيث $m \in s$ تعني أن "العدد m هو المعكوس الجمعي للعدد b " لكل m

$s \ni b$ ، $v \ni s$ ، اكتب بيان e ومثلها بمخطط سهمي هل e دالة أم لا ولماذا؟

الحل

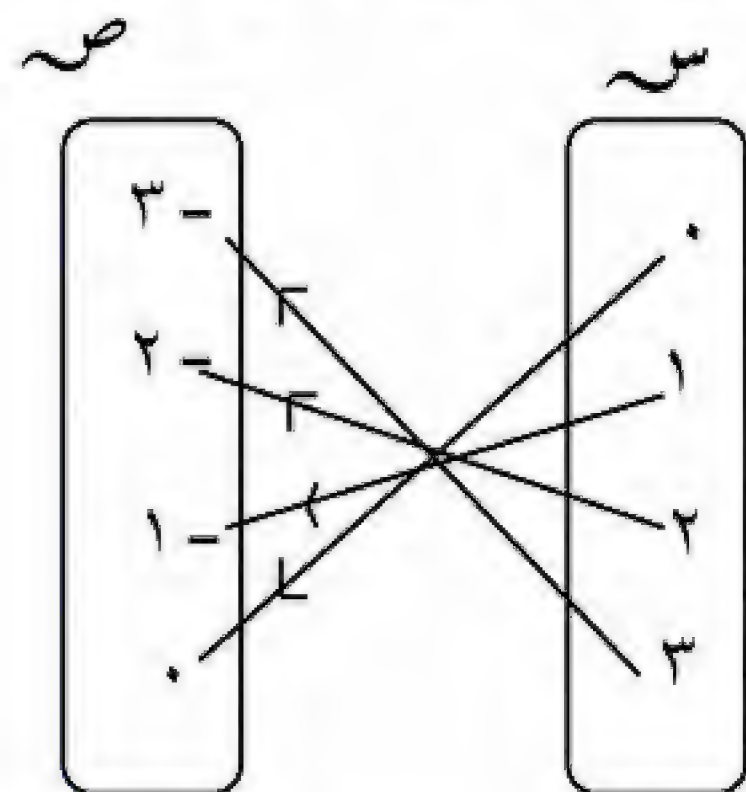
بيان e

=

$$\{(0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$$

e دالة لأن كل عنصر من عناصر s

خرج منه سهم واحد فقط إلى v

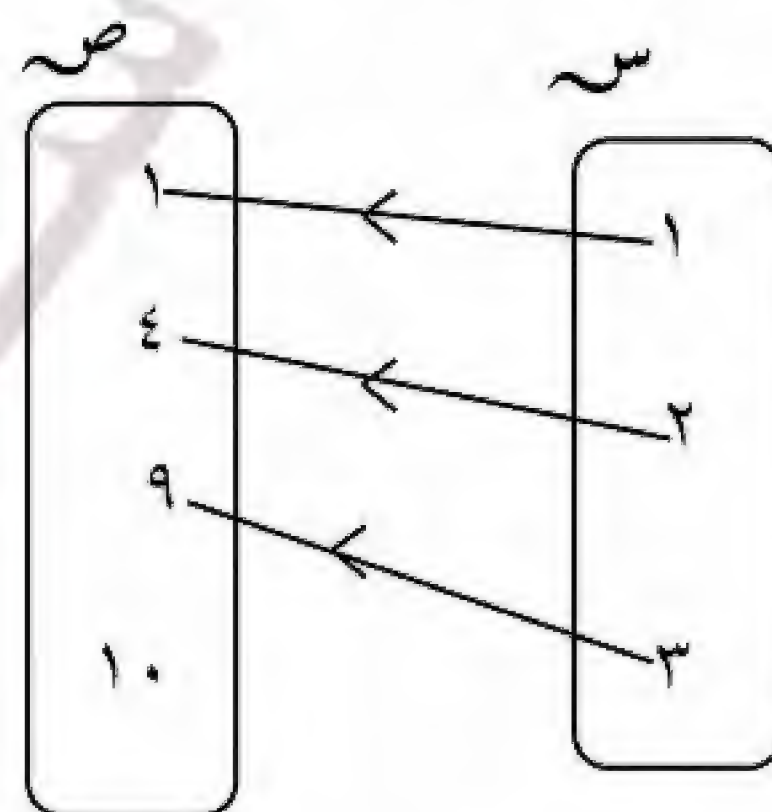


١٩ إذا كانت $s = \{1, 2, 3\}$ ، $v = \{1, 4, 9, 10\}$ ، e علاقة من s إلى v

حيث $m \in s$ تعني أن " $m = \overline{ab}$ " لكل $m \in s$ ، $b \in v$ اكتب بيان e ومثلها

بمخطط سهمي، ثم بين هل e دالة أم لا مع ذكر السبب، وان كانت دالة اذكر المدى؟

الحل



$$\{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\} = e$$

e دالة لأن كل عنصر من عناصر s ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط

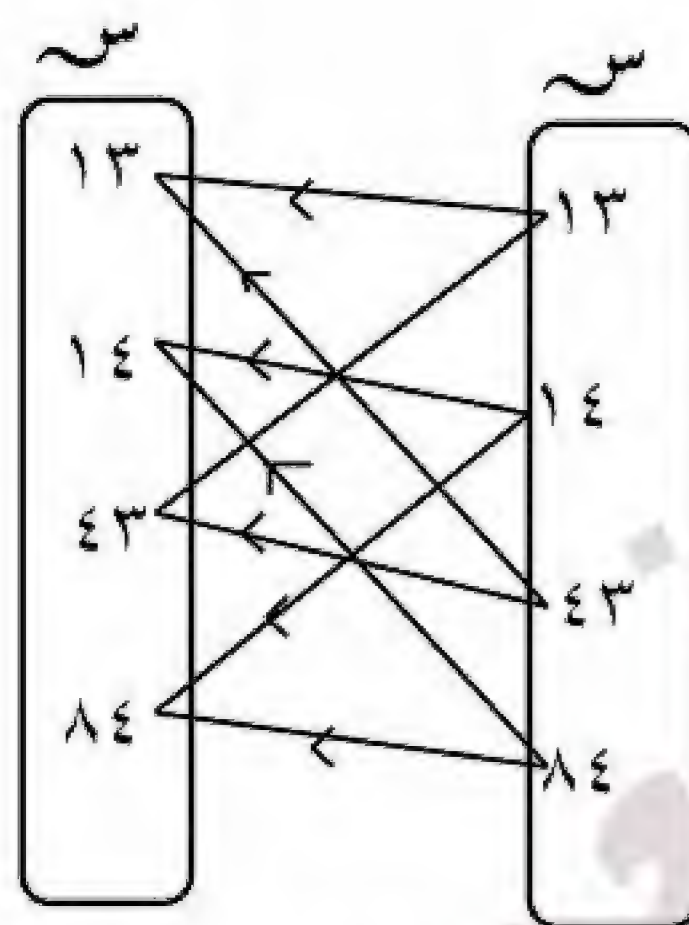
في أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

$$\{1, 4, 9\} = \text{المدى}$$

٢٠) إذا كانت $\sim = \{13, 14, 43, 84\}$ وكانت \sim علاقة على \sim حيث \sim ب \sim تعنى أن "العدد \sim له نفس رقم أحاد العدد \sim " لكل $\sim \in \sim$ ، ب $\sim \in \sim$ اكتب بيان \sim

ومثلها بمخطط سهمي

الحل



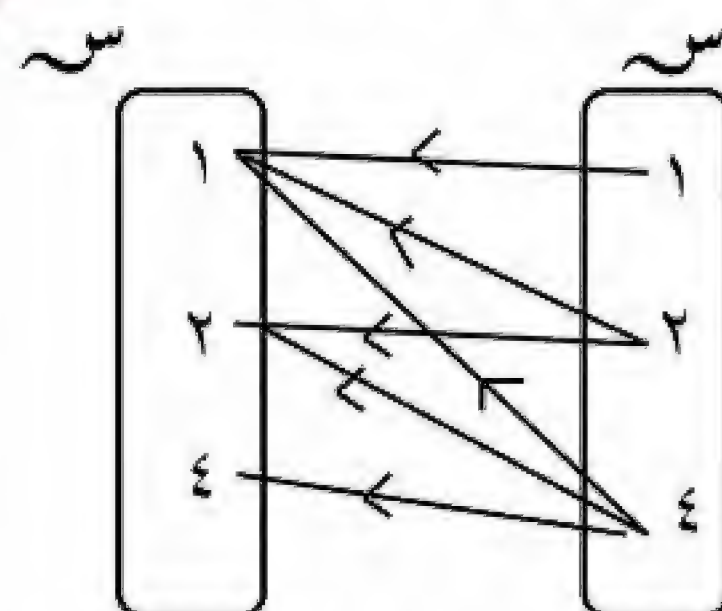
بيان $\sim = \{ (13, 13), (13, 14), (13, 43), (13, 84), (14, 13), (14, 14), (14, 43), (14, 84), (43, 13), (43, 14), (43, 43), (43, 84), (84, 13), (84, 14), (84, 43), (84, 84) \}$

٢١) إذا كانت $\sim = \{1, 2, 4\}$ وكانت \sim علاقة على \sim حيث \sim ب \sim تعنى أن " مضاعف ب " لكل $\sim \in \sim$ ، ب $\sim \in \sim$ اكتب بيان \sim ومثلها بمخطط سهمي

ثم بين هل \sim دالة أم لا ؟

الحل

بيان $\sim = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4) \}$



\sim ليست دالة لأن العنصر ٢ خرج منه سهمان في المخطط السهمي

دوال كثيرات الحدود

تعريف:

$$\text{الدالة } d: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, d(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n$$

حيث $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathcal{E}$ ، $\mathcal{E} \ni p_i$ ، $\mathcal{E} \ni p_i$ تسمى دالة كثيرة حدود

وتكون درجة الدالة كثيرة الحدود هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة

أى أن :

الدالة كثيرة الحدود هي دالة قاعدتها حد او مقدار جبرى ويتوفر فيها الشرطان الآتيان :

① كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية

② قوة المتغير s فى أى حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعى

فمثلاً:

$d(s) = s^2 + 8s$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الاولى

$r(s) = s^2 - 2s - 1$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

$v(s) = s^3 - \sqrt{3}s - 7$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

بينما:

$$d_1(s) = \sqrt{s}, d_2(s) = \frac{1}{s}, d_3(s) = s^2 + s^{-2} \text{ لا تعد دوال كثيرات}$$

حدود

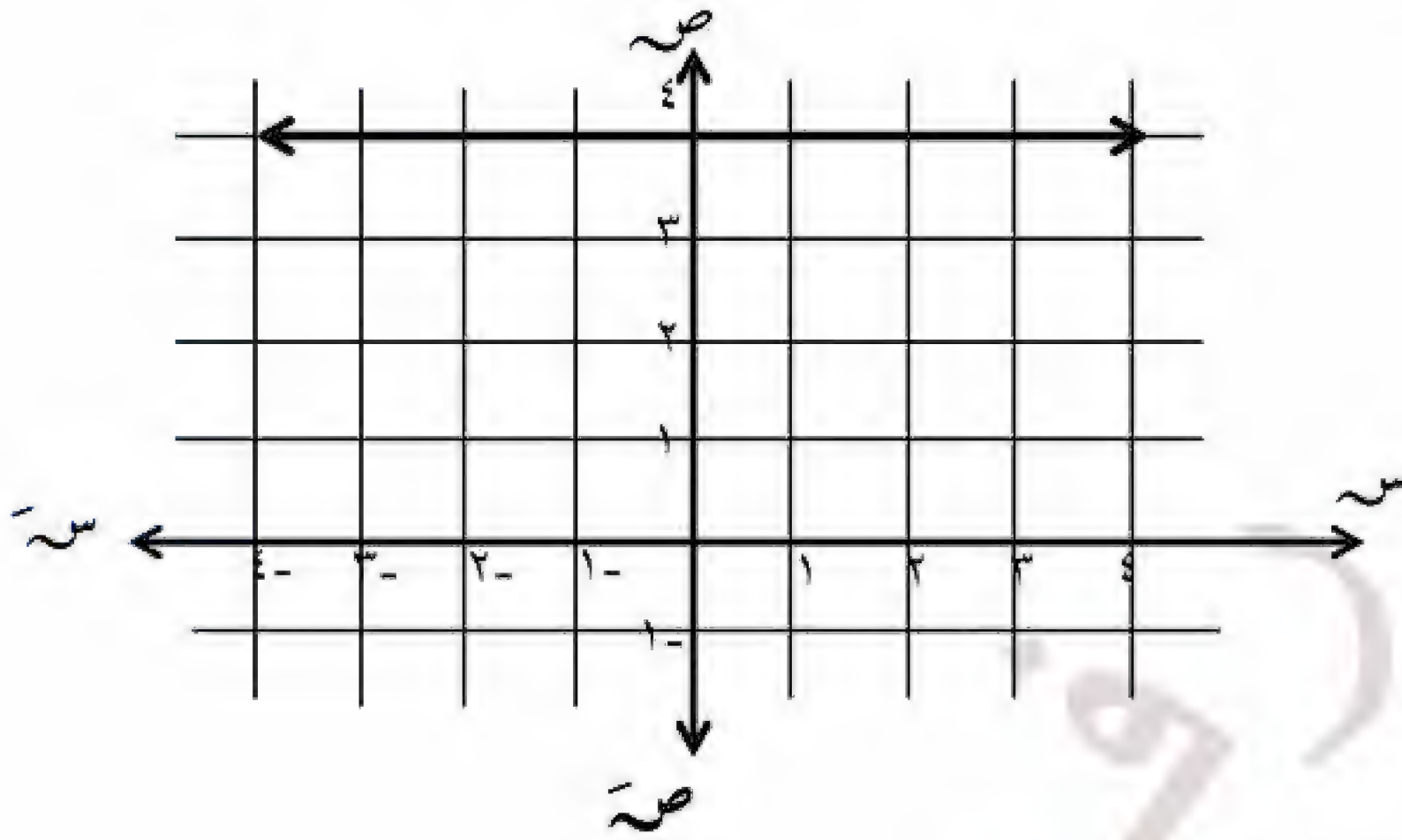
ملاحظة ①:

الدالة $d: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, d(s) = b$ حيث $b \in \mathcal{E}$ تسمى دالة ثابتة وهي كثيرة

حدود من الدرجة صفر وتمثل بيانياً بخط مستقيم يوازي محور السينات

فمثلا : د(س) = ٤ دالة ثابتة حيث د(١) = ٤ ، د(٠) = ٤ ، د(٣-) = ٤ وهكذا

وتمثل بيانيا هكذا



ملاحظة ٢

الدالة د: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ حيث د(س) = $٣س + ب$ ، $\mathcal{C} \supset \mathcal{P} - \{٠\}$ ، $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ تسمى دالة خطية وهي كثيرة حدود من الدرجة الاولى وتمثل بيانيا بخط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة

$(٠, \frac{-ب}{٣})$ ومحور الصادات في النقطة $(ب, ٠)$

مثال : مثل بيانيا د(س) = $٣س - ١$ وأوجد نقط التقاطع مع محوري الاحداثيات

الحل

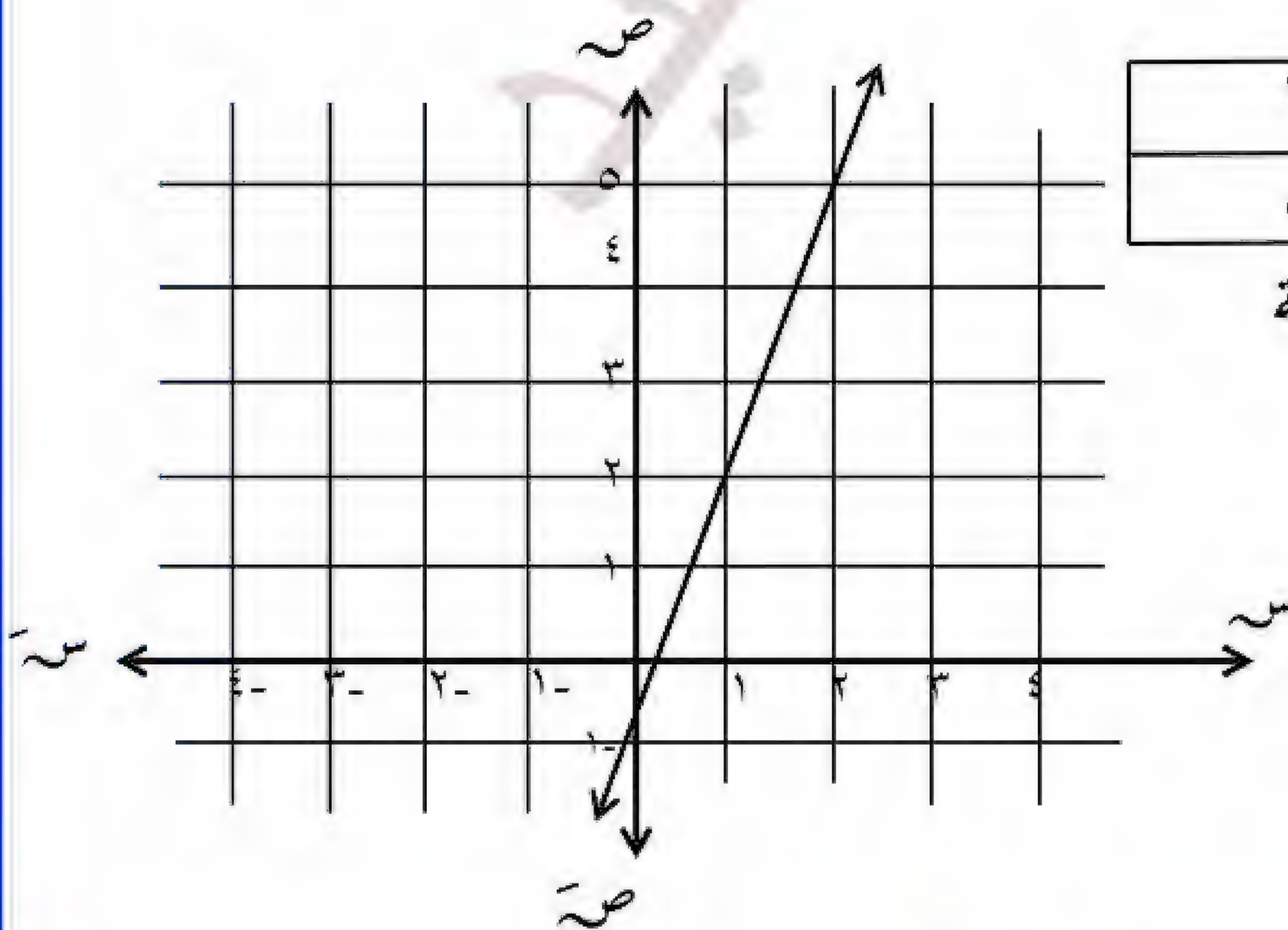
س	صفر	١	٢
ص	١ -	٢	٥

يقطع محور السينات في النقطة

$(٠, \frac{١}{٣})$

ويقطع محور الصادات في

النقطة $(١ - , ٠)$



ملاحظة ٣

عند بحث ما اذا كانت دالة تمثل دالة كثيرة حدود ام لا فاننا لا نقوم بتبسيط قاعدتها

فمثلا الدالة $D(s) = s(s + \frac{1}{s})$ لا تمثل كثيرة حدود ، بينما الدالة $D(s) = s^2 + 1$

كثيرة حدود

ملاحظة ٤

عند بحث درجة الدالة يجب تبسيط قاعدتها الى ابسط صورة قبل تعيين درجتها

فمثلا : الدالة $D(s) = s^2(s+2)^2$ من الدرجة الرابعة

لأن $s^2(s+2)^2 = s^2(s^2 + 4s + 4) = s^4 + 4s^3 + 4s^2$

تمارين محلولة

① اذا كانت $D(s) = s^2 - 2s - 5$ أثبت أن : $D(s+1) = D(s-1)$

الحل

$$D(s+1) = (s+1)^2 - 2(s+1) - 5$$

$$= s^2 + 2s + 1 - 2s - 2 - 5 = s^2 - 6 = \text{صفر}$$

$$D(s-1) = (s-1)^2 - 2(s-1) - 5$$

$$= s^2 - 2s + 1 - 2s + 2 - 5 = s^2 - 4s - 2 = \text{صفر}$$

$$\therefore D(s+1) = D(s-1)$$

② اذا كانت $D(s) = s^2 - 2s + 5$ أثبت أن : $D(\frac{1}{s}) = D(2)$

الحل

$$D(2) = 2^2 - 2(2) + 5 = 3 = \text{صفر}$$

$$D(\frac{1}{s}) = (\frac{1}{s})^2 - 2(\frac{1}{s}) + 5 = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + 5 = \text{صفر}$$

$$\therefore D(\frac{1}{s}) = D(2)$$

③ اذا كانت د (س) = س² - س³ ، مر (س) = س - س³

Ⓐ أوجد د (√2) + مر³(√2)

Ⓑ اثبت أن : د (3) = مر (3)

الحل

$$\textcircled{A} \quad \text{د}(\sqrt{2}) + \text{مر}^3(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$= 2 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2}$$

$$\textcircled{B} \quad \text{د}(3) = (3)^2 - (3)^3 = 9 - 27 = -18$$

$$\text{مر}(3) = 3 - 3^3 = 3 - 27 = -24$$

$$\therefore \text{د}(3) = \text{مر}(3)$$

④ اذا كانت د (س) = س² + س + ب ، مر (س) = س² + ب

وكان د (2) + مر (4) = 30 أوجد د (2) - مر (2)

الحل

$$\text{د}(2) = 2^2 + 2 + \text{ب} = 6 + \text{ب}$$

$$\text{مر}(4) = 4^2 + \text{ب} = 16 + \text{ب}$$

$$\therefore 30 = \text{د}(2) + \text{مر}(4) = 6 + \text{ب} + 16 + \text{ب}$$

$$\therefore 30 = 2\text{ب} + 22 \Rightarrow 2\text{ب} = 8 \Rightarrow \text{ب} = 4$$

$$\therefore \text{د}(2) - \text{مر}(2) = (6 + 4) - (4 + 4) = 10 - 8 = 2$$

⑤ اذا كانت د (س) = س² + س + ج ، و كانت د (0) = 0 عندما س ∈ {0, 3}

فأوجد قيمة كلا من ب ، ج

الحل

$$\therefore \text{د}(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0^2 + 0 + \text{ج} \Rightarrow \text{ج} = 0$$

$$\therefore \text{د}(3) = 3^2 + 3 + \text{ب} = 12 + \text{ب}$$

الحل

① $p = -2$ ، $b = \text{صفر}$

② $p = 11$

③ $b = 3$

④ $b = 19$

⑤ النقطة $(-2, 0)$ ⑥ $(-4, -12)$

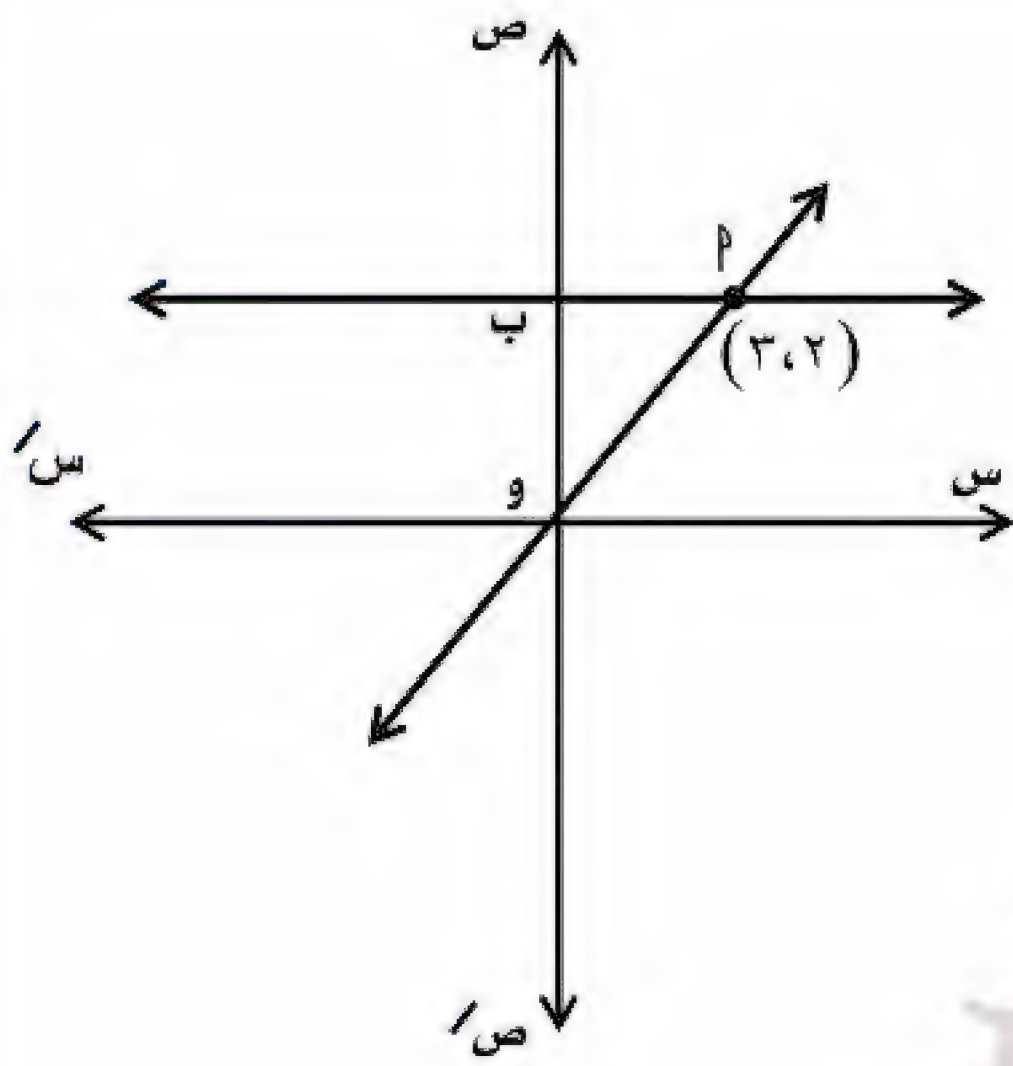
⑦ الدرجة صفر

⑧ $v = 5$

⑨ $b = 4$

⑩ 9

⑪ $p = 2$



⑦ في الشكل المقابل :

الدالة الثابتة d تمثل بيانياً
بالمستقيم p

والدالة الخطية r تمثل بيانياً
بالمستقيم p حيث $p(3, 2)$

① اكتب قاعدة الدالة d

وقاعدة الدالة r

② أوجد قيمة $d(-10) + r(6)$

الحل

∴ دالة ثابتة تمثل بخط مستقيم يوازي

محور السينات وتمر بالنقطة $p(3, 2)$

∴ قاعدة الدالة d هي : $d(s) = 3$

∴ دالة خطية تمر بالنقطتين $p(3, 2)$ و $(0, 0)$

∴ قاعدة الدالة r هي $r(s) = b s + j$

$$b \times 0 + j = 0$$

$$\therefore r(s) = b s$$

$$\therefore j = \text{صفر}$$

$$\therefore 2 = b \times 3$$

$$\therefore (3, 2) \in \text{المستقيم } p \Leftrightarrow$$

$$\therefore r(s) = \frac{3}{2} s$$

$$\therefore b = \frac{2}{3}$$

$$\therefore d(-10) + r(6) = 3 + 6 \times \frac{3}{2} = 12$$

الدالة التربيعية

الدالة $د: ع \rightarrow ع$ حيث $د(س) = س^2 + ب س + ج$ ، $ب$ ، $ج \in ع$ ، $س \neq صفر$

تسمى دالة تربيعية وهي كثيرة حدود من الدرجة الثانية

ملاحظات

- إذا كان معامل $س^2$ موجبا فإن المنحنى يكون مفتوحا لأعلى ويكون للدالة نقطة قيمة صغرى ، وإذا كان معامل $س^2$ سالبا فإن المنحنى يكون مفتوحا لأسفل ويكون للدالة نقطة قيمة عظمى

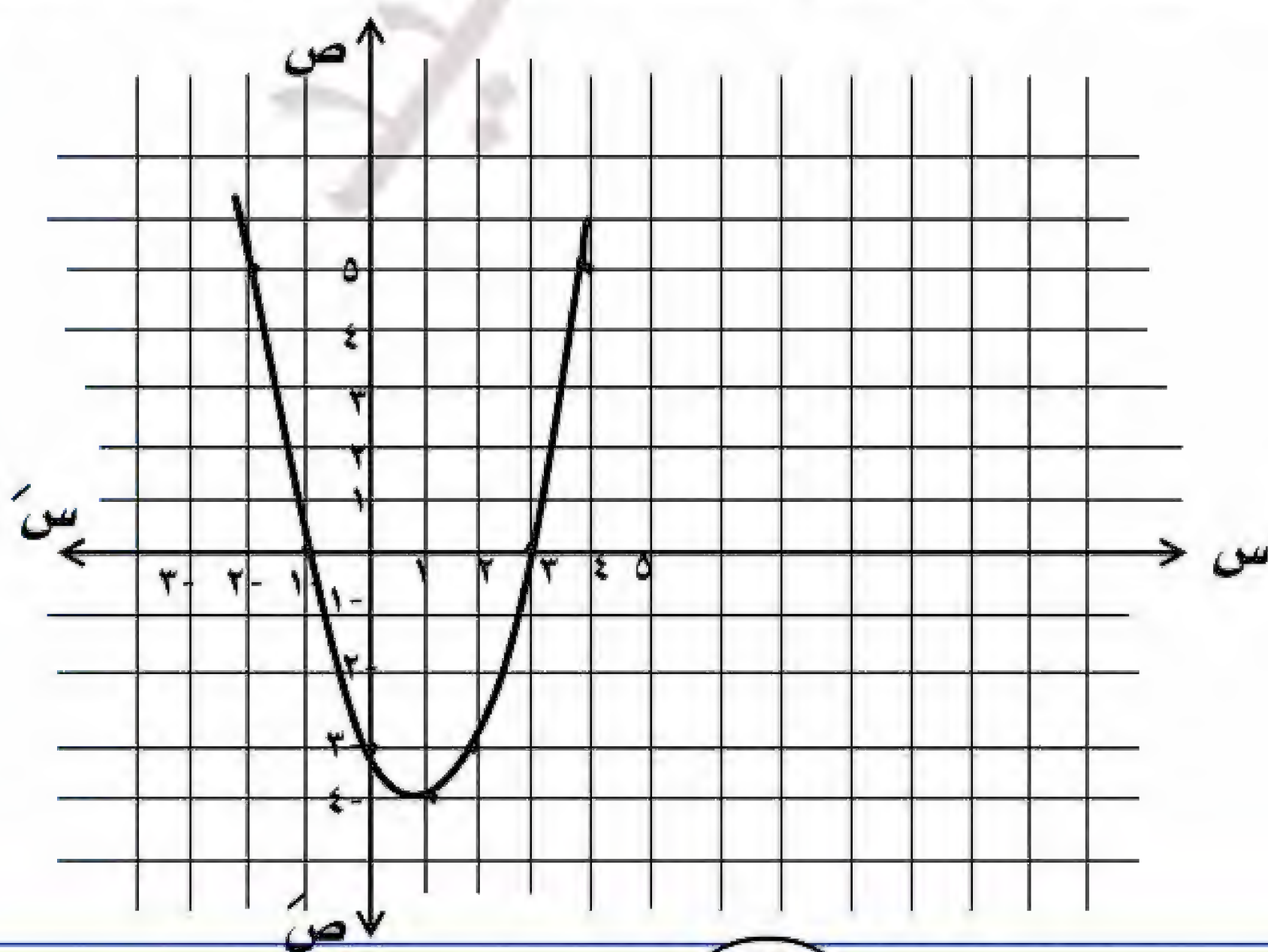
$$\textcircled{2} \text{ رأس المنحنى } = \left(\frac{-ب}{٢} ، \left(\frac{-ب}{٢} \right) د \right)$$

- معادلة محور التماثل : $س =$ الـ إحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى

- القيمة الصغرى أو العظمى = الـ إحداثى الصادى لرأس المنحنى

تمارين محلولة

- ارسم الشكل البياني للدالة $د(س) = س^2 - ٢ س - ٣$ متخذنا $س \in [-٤ ، ٤]$ ومن الرسم أوجد نقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل والقيمة الصغرى للدالة



س	٢-	١-	صفر	١	٢	٣	٤
ص	٥	صفر	٣-	٤-	٣-	صفر	٥

من الرسم نجد أن :
نقطة رأس المنحنى (١-، ٤-)

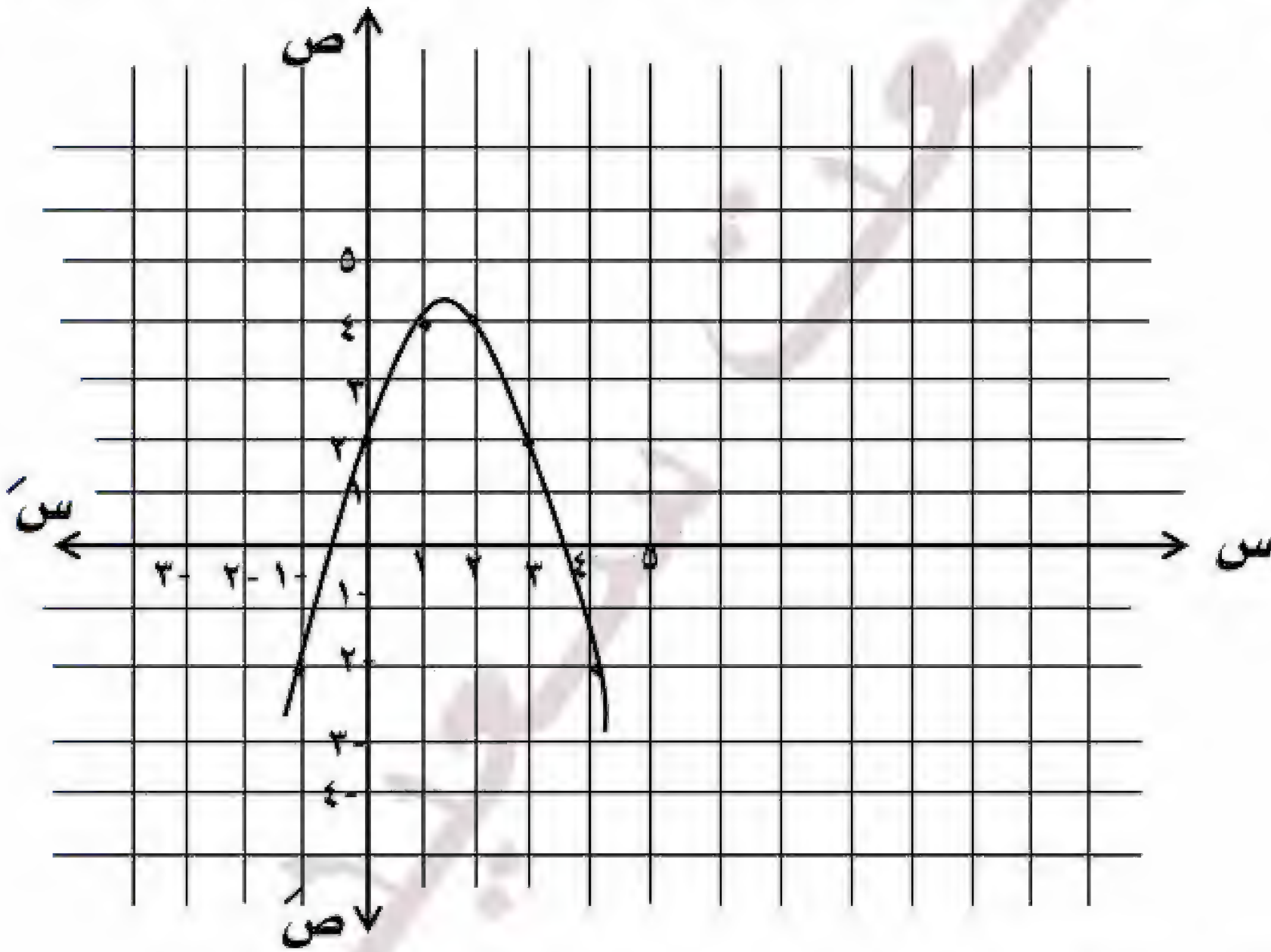
معادلة محور التماثل $s = ١$

القيمة الصغرى للدالة $٤- =$

٢) ارسم الشكل البياني للدالة $d(s) = -s^2 + ٣s + ٢$ متخذاً s متغيراً $[-٤، ١-]$

وأوجد القيمة العظمى للدالة ونقطة رأس المنحنى ومعادلة محور التماثل

الحل



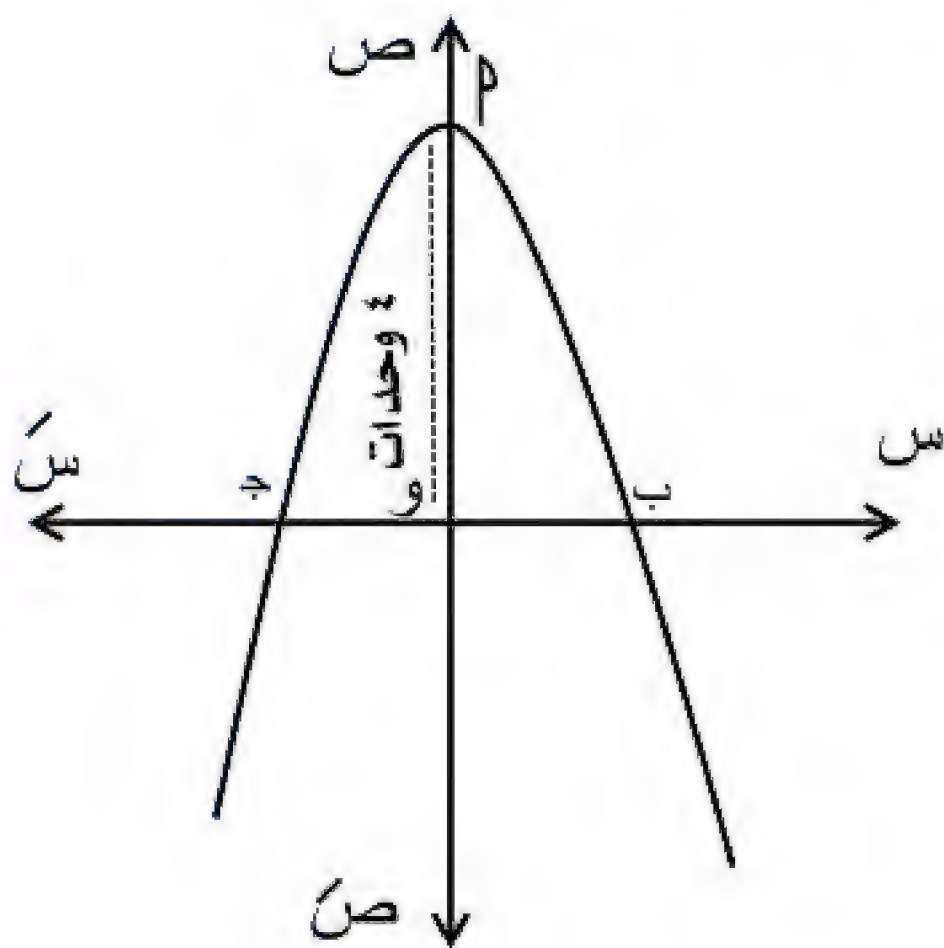
س	١-	٠	١	٢	٣	٤
ص	٢-	٢	٤	٤	٢	٢-

نقطة رأس المنحنى $\left(\frac{٣}{٢}, \frac{١}{٤} \right) = \left(\left(\frac{ب}{٢} \right), \frac{٣}{٢} \right)$

القيمة العظمى للدالة $\frac{١}{٤} =$

معادلة محور التماثل $s = \frac{٣}{٢}$

٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة حيث : $d(s) = s^2 - 2$



إذا كان $p = 4$ وحدات أوجد :

١) قيمة s

٢) إحداثي ب ، ج

٣) مساحة المثلث الذى رؤوسه p ، ب ، ج

الحل

$\because p = 4$ وحدات \therefore نقطة $p = (4, 0)$

\therefore نقطة p تحقق معادلة المنحنى

$$\therefore 4 = s^2 - 2 \iff s^2 = 6 \iff s = \pm \sqrt{6}$$

\therefore منحنى الدالة يقطع محور السينات فى النقطتين ب ، ج

$$\therefore 0 = s^2 - 4 \iff s^2 = 4 \iff s = \pm 2$$

$$\therefore s = 2 \text{ أو } s = -2$$

$$p = (0, 4) \text{ ، } ج = (0, -4)$$

$$\therefore p = 4 \text{ وحدات}$$

$$\text{مساحة } \triangle p \text{ ب ج} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \text{ وحدات مربعة}$$

٤) إذا كان $d(s) = s^3 + (2 + s)s + 6$ وكان الاحداثى السينى لرأس

منحنى الدالة $d(s)$ يساوى -2 أوجد قيمة s

الحل

الاحداثى السينى لرأس المنحنى $= \frac{-b}{2a}$

$$-2 = \frac{-s^3 - (2 + s)s - 6}{2s} \iff s^3 + (2 + s)s + 6 = 4s$$

⑤ إذا كان د(س) = $p^2 + b^2 + 3$ وكانت النقطة ٢ هي نقطة رأس المنحنى

أوجد د(٥)

الحل

∴ النقطة $(٣, ٠)$ تحقق المنحنى

$$∴ ٣ = ٠ + ٠ + ٣$$

$$٣ = ٣$$

$$∴ د(٢) = د(٢ -) = (٧)$$

$$٣ + ٧ + p^2(٧) = ٣ + (٢ -) + p^2(٢ -)$$

$$٩ = b - ٤p$$

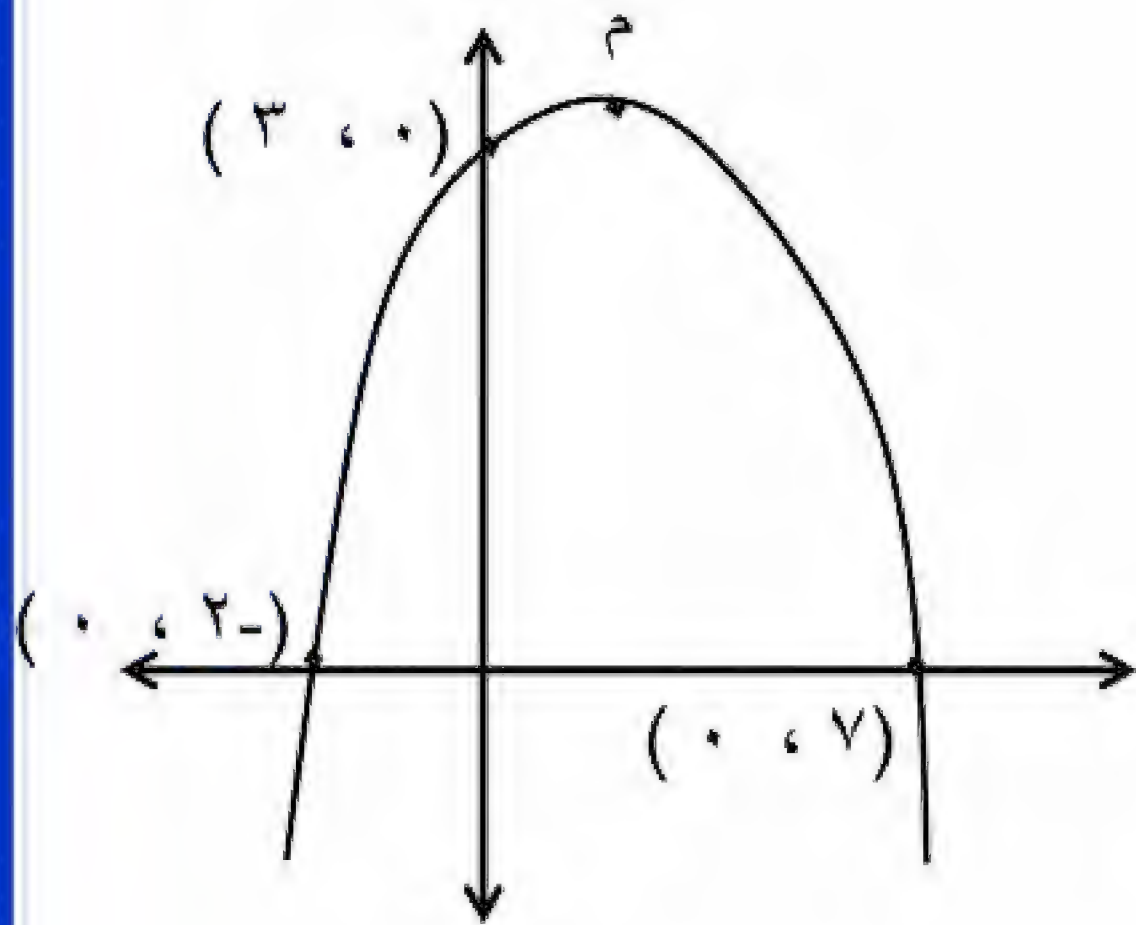
$$b = ٥ - p$$

$$د(٥) = (٥) + p^2(٥) + ٥ + ٣ = ٥ + ٣ + ٢٥p$$

بالتعويض عن ب

$$د(٥) = (٥) + ٢٥p + (٥ - p)٥ + ٣ = ٣ + ٢٥p - ٥p + ٥ = ٣ + ٢٠p$$

$$∴ د(٥) = ٣$$



⑥ إذا كان د(س) = p^2

وكان ٦ ب ج مربع حيث

ب(٦، صفر)

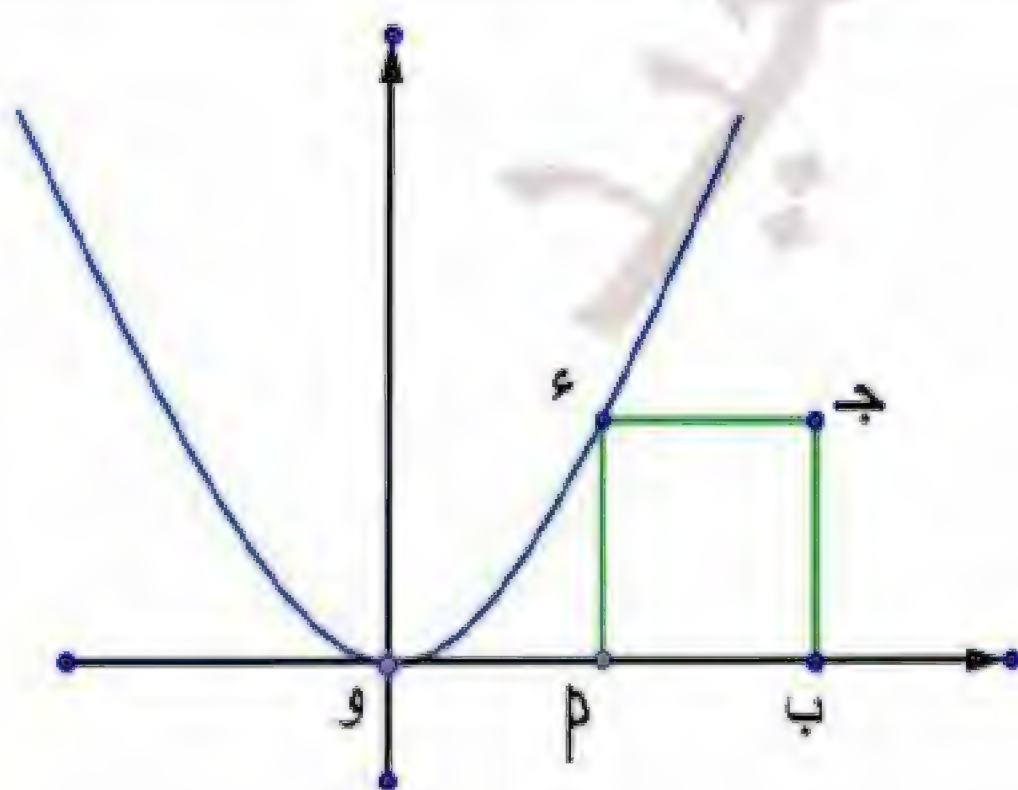
أوجد مساحة المربع ٦ ب ج

الحل

نفرض أن $٦ = b$ و $٦ = p$

احداثي نقطة $٦ = (٦ - ل, ل)$ وهي تحقق المنحنى

$$∴ ل = (٦ - ل)^2$$



$$36 - 12L + L^2 = 0$$

$$L^2 - 12L + 36 = 0$$

$$L = 9 \text{ (مرفوض لأن طول } L \text{ يصبح سالباً)}$$

$$L = 9 \text{ (مرفوض لأن طول } L \text{ يصبح سالباً)}$$

$$\therefore L = 4 \text{ } \therefore \text{طول ضلع المربع} = 4 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مساحة المربع} = 16 \text{ سم}^2$$

٧) أثناء قراءة كريم لكتاب وجد أنه بعد ٣ ساعات تبقى له ٥٠ صفحة وبعد ٦ ساعات تبقى له ٢٠ صفحة فإذا كانت العلاقة بين الزمن (ن) وعدد الصفحات (ص) هي علاقة خطية:

١) مثل العلاقة بين ن ، ص بيانياً ثم أوجد العلاقة الجبرية بينهما

٢) ما الوقت الذي ينتهي فيه كريم من قراءة الكتاب ؟

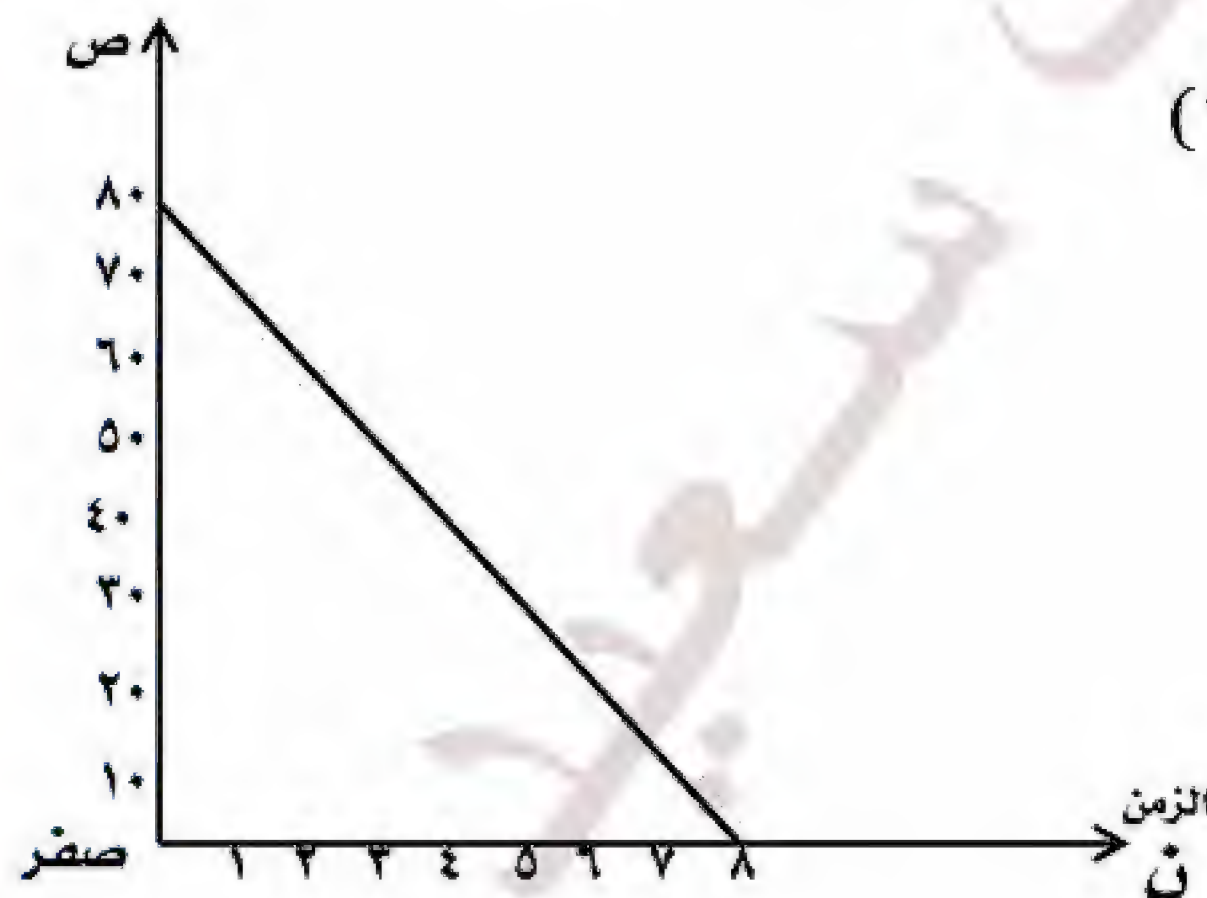
٣) كم عدد صفحات الكتاب المتبقية عندما بدأ كريم القراءة ؟

الحل

بأخذ النقطتين (٥٠، ٣) ، (٢٠، ٦)

$$\text{الميل} = \frac{20 - 50}{6 - 3} = -10$$

$$\text{ص} = -10\text{ن} + 80$$



٢) الوقت الذي ينتهي فيه كريم من قراءة الكتاب

بعد ٨ ساعات

٣) عدد صفحات الكتاب المتبقية عندما بدأ كريم القراءة

٨٠ صفحة

١٠) إذا كانت النقطة (١٠ ، ٢) هي نقطة رأس المنحنى الدالة

د(س) = ٢س - ٦س + ج أوجد قيمة ج

الحل

الاحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-b}{2a}$

$$10 = \frac{2}{2} \Rightarrow 2 = 10$$

$$2 = (س) = 2س - 6س + ج$$

$$2 = (2 - 6(10) + ج) \therefore 2 = ج - 60$$

$$ج = 62$$

١١) إذا كان د(س) = ٢س - ٦س + ب نقطة رأس المنحنى (١ ، ٤) هي نقطة رأس

المنحنى أوجد قيمة ب

الحل

الاحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-b}{2a}$

$$1 = \frac{2}{2} \Rightarrow 2 = 1$$

$$1 = (س) = 2س - 6س + ب$$

النقطة (١ ، ٤) تحقق الدالة

$$4 = 2(1) - 6(1) + ب \Rightarrow 4 = ب - 4$$

١٢) أكمل ما يلى :

١) معادلة محور التماثل لمنحنى د(س) = ٢س - ٦س هي

٢) نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = ٢س - ٦س + ٤ هي

الحل ١) س = ٣

٢) (١ ، ٤)

النسبة

تعريف: النسبة هي مقارنة بين كميتين وعموما إذا كان p ، b عددين حقيقيين فإن النسبة بين p و b تكتب $p:b$ أو $\frac{p}{b}$ وتقرأ p إلى b حيث يسمى p مقدم النسبة ويسمى b قالي النسبة ، ويسمى p ، b معا حدى النسبة

ملاحظات

① النسبة لا تتغير إذا ضرب حداها (أو قسما) على عدد حقيقى لا يساوى

صفر

② النسبة تتغير إذا أضيف الى حديها أو طرح منهما عدد حقيقى لا

يساوى صفر

③ إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{d}{j}$ فإن $p \times j = d \times b$

④ إذا كان $p \times j = d \times b$ فإن $\frac{p}{b} = \frac{d}{j}$

⑤ إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{d}{j}$ فإن $\frac{p}{d} = \frac{b}{j}$

⑥ إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{d}{j}$ فإن $p = d$ ، $b = j$ حيث m ثابت لا يساوى صفر

تمارين محلولة □

① أوجد العدد الذى إذا أضيف الى حدى النسبة $\frac{2}{7}$ لتصبح $\frac{1}{2}$

الحل

نفرض أن العدد هو s

$$\frac{1}{2} = \frac{s+2}{s+7}$$

$$٤ + ٢س = ٧ + س$$

$$٢س - س = ٧ - ٤$$

$$س = ٣ \quad \therefore \text{العدد هو } ٣$$

٢) إذا كانت النسبة بين بعدى مستطيل هي ٢:٣ وكان محيط المستطيل

٦٠ سم أوجد بعدى المستطيل ومساحته

الحل

نفرض أن بعدا المستطيل ٢ م ، ٣ م

$$\therefore \text{محيط المستطيل} = (\text{الطول} + \text{العرض}) \times ٢$$

$$٦٠ = (٥ م) \times ٢ \quad \Leftarrow \quad ٦ = م$$

\therefore بعدا المستطيل هما ١٢ ، ١٨

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = ١٨ \times ١٢ = ٢١٦ \text{ سم}^٢$$

٣) مثلث النسبة بين طول قاعدته وارتفاعه ٢:٣ ومساحته ٤٨ سم^٢ أوجد طول

قاعدته وارتفاعه

الحل

نفرض أن طول قاعدته ٣ م ، وارتفاعه ٢ م

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{١}{٢} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\therefore \frac{١}{٢} \times ٣م \times ٢م = ٤٨ \quad \Leftarrow \quad م^٢ = ١٦$$

$$م = ٤ \quad \therefore \text{طول القاعدة} = ١٢ \text{ سم} ، \text{الارتفاع} = ٨ \text{ سم}$$

٤) أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف معكوسه الضربى إلى تالى النسبة

$$\frac{٢}{٣} \text{ أصبحت } \frac{٣}{٥}$$

الحل

$$\text{نفرض أن العدد س} \quad \therefore \text{معكوسه الضربى} = \frac{١}{س}$$

$$\frac{٣}{٥} = \frac{٢}{\frac{١}{س} + ٣}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2s}{1+3s}$$

$$10s = 9s + 3 \iff s = 3 \therefore \text{العدد هو } 3$$

⑤ إذا كان $\frac{s}{5} = \frac{4}{5}$ أوجد قيمة المقدار $\frac{2s-3}{s+3}$

الحل

$$s = 4, \quad 5 = 5$$

$$\frac{3}{19} = \frac{2}{19} = \frac{(20) - (4)^2}{(20)^3 + 24} = \text{المقدار}$$

⑥ إذا كان $\frac{s-2}{3} = \frac{1}{3}$ أوجد $\frac{s}{s+3}$

الحل

$$3(s-2) = s+3$$

$$3s-6 = s+3$$

$$2s = 9 \iff \frac{2}{9} = \frac{s}{s}$$

⑦ إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{21s+p}{7s+b}$ فأوجد قيمة $\frac{2+b}{p}$ حيث $s \neq 0$

الحل

$$21bs + p^2 = 7ps + b^2$$

$$12bs = 7ps \iff p = 3b \iff \frac{p}{b} = 3$$

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{26} = \frac{2+20}{26} = \frac{2+b}{p} \iff p = 2, \quad 3 = b$$

⑧ إذا كان $p^2 = 3b = 4c$ فأوجد $p : b : c$

الحل

$p^2 = 3b = 4c$ بالقسمة على ١٢

$$p = \frac{b}{4} = \frac{c}{3}$$

$$p^2 = 3b = 4c \Rightarrow p^2 = 3b = 4c$$

$$p : b : c = 3 : 4 : 6$$

⑨ إذا كان $p : b : c = 3 : 4 : 5$ أوجد القيمة العددية للمقدار

$$\frac{p^2 + b^2 + c^2}{p(b+c)}$$

الحل

$$p^2 = 3b = 4c$$

$$\frac{50}{27} = \frac{p^2 + b^2 + c^2}{p(b+c)} = \frac{p^2 + p^2 + p^2}{p(p+p+p)} = \frac{3p^2}{3p^2} = 1$$

⑩ إذا كان $\frac{p}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ فأوجد النسبة $\frac{p^2 + b^2 + c^2}{p^3 - b^3 - c^3}$

الحل

$$p = 3k, b = 4k, c = 5k$$

$$\frac{4}{3} = \frac{p^2 + b^2 + c^2}{p^3 - b^3 - c^3} = \frac{9k^2 + 16k^2 + 25k^2}{27k^3 - 64k^3 - 125k^3} = \frac{44k^2}{-160k^3} = -\frac{11}{40k}$$

⑪ إذا كان $9s^2 + 16v^2 = 24sv$ أوجد $\frac{s}{v}$

الحل

$$\frac{4}{3} = \frac{s}{v} \Rightarrow 4v = 3s \Rightarrow \frac{s}{v} = \frac{4}{3}$$

⑫ إذا كان $p : b : j = 5 : 7 : 3$ وكان $p + b = 27, 6$ فأوجد قيمة k من

p, b, j

الحل

$$p = 5m, b = 7m, j = 3m$$

$$p + b = 27, 6 \therefore 5m + 7m = 27, 6 \implies 12m = 27, 6 \implies m = 2, 3$$

$$p = 5m = 11, 5 \quad b = 7m = 16, 1 \quad j = 3m = 6, 9$$

⑬ أوجد $s : v : e$ في كل مما يأتي :

$$\textcircled{1} \quad \frac{s}{v} = \frac{3}{5}, \quad \frac{v}{e} = \frac{4}{7} \quad \textcircled{2} \quad \frac{s}{v} = \frac{4}{5}, \quad \frac{v}{e} = \frac{3}{7}$$

الحل

$$\textcircled{1} \quad s = \frac{3}{5}v, \quad v = \frac{4}{7}e$$

$s : v : e$

$$\frac{3}{5}v : v : \frac{7}{4}v$$

$$\frac{3}{5} : 1 : \frac{7}{4} \quad \text{"بالمضرب } \times 20 \text{"}$$

$$12 : 20 : 35$$

$$\textcircled{2} \quad v = \frac{5}{4}s, \quad e = \frac{7}{3}s$$

$s : v : e$

$$s : \frac{5}{4}s : \frac{7}{3}s$$

$$1 : \frac{5}{4} : \frac{7}{3} \quad \text{"بالمضرب } \times 12 \text{"}$$

$$12 : 15 : 28$$

١٤) إذا كان $\frac{1}{9} = \frac{p}{j}$ ، $\frac{1}{3} = \frac{p}{b}$ ، $p + b + j = 26$ فأوجد كلا من p ، b ، j

الحل

$$b = 3p ، j = 9p$$

$$p : b : j$$

$$p : 3p : 9p$$

$$1 : 3 : 9$$

$$\therefore p : b : j = 1 : 3 : 9$$

نفرض أن $p = m$ ، $b = 3m$ ، $j = 9m$

$$m + 3m + 9m = 26 \iff 13m = 26 \iff m = 2$$

$$\therefore p = 2 ، b = 6 ، j = 18$$

١٥) إذا كان $p^2 = b^3 = j^4$ أوجد قيمة $\frac{b^2 - p}{p + b + j}$

الحل

$$p^2 = b^3 = j^4$$

$$\frac{p}{6} = \frac{b}{4} = \frac{j}{3}$$

$$p = 6m ، b = 4m ، j = 3m$$

$$\frac{b^2 - p}{p + b + j} = \frac{(4m)^2 - 6m}{6m + 4m + 3m} = \frac{16m^2 - 6m}{13m} = \frac{16m - 6}{13}$$

١٦) إذا كان $\frac{5}{2} = \frac{p}{b}$ ، $\frac{3}{7} = \frac{p}{j}$ أوجد $b : j$

الحل

$$b = \frac{5}{2}p ، j = \frac{3}{7}p$$

$$b : j = \frac{5}{2}p : \frac{3}{7}p = 35 : 6$$

١٧) أكمل ما يلي :

١) إذا كان $\frac{ص}{٣} = \frac{ص}{٥}$ فإن $\frac{ص^٣}{٥س} = \dots$

٢) إذا كان $\frac{٢}{ب} = \frac{٧}{ب}$ فإن $\frac{٢-ب}{ب+ب} = \dots$

٣) إذا كان $٢٣ = ٨ب$ فإن $\frac{٢٢}{ب} = \dots$

٤) إذا كان (س - ٥) : (٣ + س) = ٢ : ٣ فإن س =

٥) نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم الى مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها ٢ ل سم كنسبة :

٦) إذا كان $\frac{٢٣-٢ب}{٢٧+٤ب} = \text{صفر}$ فإن $\frac{ب}{٢} = \dots$

٧) إذا كان $٤س^٢ - ١٢س + ٩ص^٢ = ٠$ وكانت س \Rightarrow ح ، ص \Rightarrow ح فإن $\frac{س}{ص} = \dots$

٨) إذا كان $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٧} = \frac{ص}{ع}$ فإن س : ص : ع = : :

٩) إذا كان $\frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٩}$ وكان $٢ + ب = ٣٤$ فإن $٢ = \dots$

١٠) العدد الذى اذا طرح من حدى النسبة $\frac{١٧}{٢٣}$ أصبحت $\frac{٢}{٣}$ هو

الحل

١) $\frac{ص^٣}{٥س} = ١$

٢) $\frac{٢-ب}{٢+ب} = \frac{٥}{٩}$

٣) $\frac{٢٢}{ب} = \frac{١٦}{٣}$

٤) س = ٣٠

٥) ٤ : ١

٦) $\frac{٢}{٢} = \frac{ب}{٢}$

٧) $\frac{٣}{٢} = \frac{س}{ص}$

٨) ٣٥ : ٢٠ : ١٢

٩) ١٨ = ٢

١٠) العدد هو ٥

التناسب

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{ج}{د}$ فإن الكميات p ، b ، $ج$ ، $د$ تكون متناسبة

والعكس : إذا كان p ، b ، $ج$ ، $د$ كميات متناسبة فإن $\frac{p}{b} = \frac{ج}{د}$

ويسمى p بالأول المتناسب ، b بالثانى المتناسب ، $ج$ بالثالث المتناسب ، $د$ بالرابع المتناسب

من خواص التناسب

① إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{ج}{د} = م$ فإن $p = م \cdot b$ ، $ج = م \cdot د$

② إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots$ وكانت ١٢ ، ٢٢ ، ٣٢ ، ... أعداد حقيقية \neq صفر

فإن
$$\text{احدى النسب} = \frac{١٢ \cdot p + ٢٢ \cdot ج + ٣٢ \cdot هـ + \dots}{١٢ \cdot b + ٢٢ \cdot د + ٣٢ \cdot و + \dots}$$

تمارين محلولة

① إذا كان $\frac{ص}{٣} = \frac{س}{٧}$ فأثبت أن : $(٢س - ٣ص)$ ، $(س + ٢ص)$ ، ١٠ ، ٢٦ متناسبة

الحل

$$\therefore \frac{ص}{٣} = \frac{س}{٧} = م$$

$$\therefore س = ٧م ، ص = ٣م$$

$$\frac{٥}{١٣} = \frac{٩م - ١٤م}{٦م + ٧م} = \frac{٢س - ٣ص}{س + ٢ص}$$

$$\therefore \frac{٥}{١٣} = \frac{١٠}{٢٦} \quad \therefore \frac{١٠}{٢٦} = \frac{٢س - ٣ص}{س + ٢ص}$$

$\therefore (٢س - ٣ص)$ ، $(س + ٢ص)$ ، ١٠ ، ٢٦ متناسبة

٢) إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{d}{j}$ فأثبت أن p ، b ، j ، d متناسبة

الحل

$$\therefore \frac{p}{b} = \frac{d}{j}$$

$$\therefore p(j - b) = (j - d)p$$

$$p - dp = j - bj - d$$

$$dp = jb \quad \therefore \frac{p}{b} = \frac{d}{j} \quad \therefore p ، b ، j ، d \text{ متناسبة}$$

٣) أوجد العدد الذي إذا أضيف الى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

الحل

نفرض أن العدد هو s

$$\therefore ٣ + s ، ٥ + s ، ٨ + s ، ١٢ + s \text{ متناسبة}$$

$$\frac{٣ + s}{٥ + s} = \frac{٨ + s}{١٢ + s}$$

$$(٣ + s)(٥ + s) = (٨ + s)(١٢ + s)$$

$$٣٦ + ١٥s + s^2 = ٩٦ + ٢٠s + s^2$$

$$٢s = ٤ \Rightarrow s = ٢ \therefore \text{العدد هو } ٢$$

٤) أوجد كلا من :

١) الأول المتناسب للأعداد : $\sqrt{١٤} ، ٧ ، \sqrt{٨} ، \dots$

٢) الثالث المتناسب للأعداد : ٣ ، ٤ ، \dots ، ٢٠

٣) الرابع المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، \dots

الحل

١) الأول المتناسب ١

٢) الثالث المتناسب ١٥

٣) الرابع المتناسب ٤٨

$$\textcircled{5} \text{ إذا كان } \frac{س}{ص} = \frac{ع}{ص} = \frac{ع+س}{ص} = \frac{ع+ص+س}{ص} \text{ أثبت أن } \frac{ع+ص+س}{ع-س} = 5$$

الحل

بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث

$$\text{احدى النسب} = \frac{س^2 + ص^2 + ع^2}{٧ + ٥ + ٨}$$

$$\text{احدى النسب} = \frac{(ع+ص+س)^2}{٢٠}$$

$$\text{احدى النسب} = \frac{ع+ص+س}{١٠} \quad \textcircled{1} \leftarrow$$

بضرب النسبة الثانية فى ١ - والجمع مع الاولى

$$\text{احدى النسب} = \frac{ع-س}{٥-٧}$$

$$\text{احدى النسب} = \frac{ع-س}{٢} \quad \textcircled{2} \leftarrow$$

$$\text{من (١) ، (٢) نجد ان } \frac{ع+ص+س}{١٠} = \frac{ع-س}{٢}$$

$$\therefore \frac{س+ص+ع}{ع-س} = \frac{١٠}{٢} = 5$$

$$\textcircled{6} \text{ إذا كان } \frac{س}{ص} = \frac{ع}{ص} = \frac{ع+س}{ص} \text{ أثبت أن } \frac{س^2 + ص^2 + ع^2}{١٤ + ٤ - ب} = \frac{س^2 + ص^2 + ع^2}{٦ + ٣ - ب}$$

الحل

بضرب الأولى فى ٢ و الجمع مع الثانية

$$\text{احدى النسب} = \frac{س+ص}{١٤ + ٤ - ب} \quad \textcircled{1} \leftarrow$$

بضرب الأولى والثانية فى ٢ والجمع مع الثالثة

$$\text{احدى النسب} = \frac{س^2 + 2ص + ع}{١٤ + ٢ب + ٤ب - ٢ج + ٢ج - ١} = \text{احدى النسب}$$

$$\text{احدى النسب} = \frac{س^2 + 2ص + ع}{١٣ + ٦ب} \leftarrow ٢$$

$$\text{من (١) ، (٢) نجد أن } \frac{س^2 + 2ص + ع}{١٣ + ٦ب} = \frac{س^2 + ٢ص}{١٤ + ٢ب - ٢ج}$$

٧) أكمل ما يلي :

$$\text{① } \frac{س^2 + 2ص + ع}{١١} = \frac{١١}{١١} = \frac{ع}{٤} = \frac{ص}{٥} = \frac{س}{٦}$$

$$\text{② إذا كان } \frac{س^2 - ٢ص}{ع} = \frac{ص}{٣} = \frac{س}{٢} \text{ فإن } ع = ١١$$

$$\text{③ إذا كانت } ٢ ، ٦ ، س + ١٥ \text{ متناسبة فإن } س = ١١$$

$$\text{④ } \frac{٢ + \frac{١}{٢}}{١١} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{⑤ إذا كان } \frac{س^2 + 2ص}{٧} = \frac{ص}{٢} \text{ فإن } ٧ = ١١$$

$$\text{⑥ إذا كان } \frac{س + ٢ص}{٥} = \frac{٢ + ٣ص}{٦} = \frac{س - ٢ص}{٢} \text{ فإن } ٢ = ١١$$

$$\text{⑦ } \frac{١٢ + ٣ج - ٢هـ}{١١} = \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٣} = \frac{٤}{٤}$$

الحل

$$\frac{٢ + \frac{١}{٢}}{٧} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤} \text{ ④ } \quad ٣ = س \text{ ③ } \quad ٢ = ع \text{ ②}$$

$$\text{① } \frac{س^2 + 2ص + ع}{١٤} = \frac{س^2 + ٢ص}{١١}$$

$$\frac{١٢ + ٣ج - ٢هـ}{٥} \text{ ⑦}$$

$$\frac{س - ٢ص}{٣} = \frac{٢ - ٣ص}{٢} \text{ ⑥}$$

$$١١ = ٧ \text{ ⑤}$$

$$\textcircled{8} \text{ إذا كان } \frac{1}{س} = \frac{1}{ب} \text{ فثبت أن } \frac{1+ج}{س+ع} = \frac{ج+ب}{ع+ص} = \frac{ب+1}{ص+2} \text{ الحل}$$

بضرب الثانية في (١-) والجمع مع الاولى والثالثة

$$\textcircled{1} \text{ ← احدى النسب } = \frac{1}{س} = \frac{12}{س2} = \frac{1+ج+ج-ب-ب+1}{س+ع+ع-ص-ص+1}$$

بضرب الثالثة في (١-) والجمع مع الاولى والثانية

$$\textcircled{2} \text{ ← احدى النسب } = \frac{1}{ب} = \frac{8}{ص4} = \frac{1-ج-ج+ب+ب+1}{س-ع-ع+ص+ص+1}$$

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\frac{1}{س} = \frac{1}{ب}$$

$$\textcircled{9} \text{ إذا كان } \frac{1}{س} = \frac{1}{ب} \text{ فثبت أن } \frac{1+ج}{س+ع} = \frac{ج+ب}{ع+ص} = \frac{ب+1}{ص+2}$$

الحل

بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث

$$\textcircled{1} \text{ ← احدى النسب } = \frac{1+ج+ب}{س+ع+ص} = \frac{12+ج2+ب2}{24}$$

بضرب الاولى في (٣) والثالثة في (٢) والجمع مع الثانية

$$\textcircled{2} \text{ ← احدى النسب } = \frac{13+ب3+ج+ج+12}{8+9+33} = \frac{13+ب3+ج+ج+12}{50}$$

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\frac{1}{س} = \frac{12}{50} = \frac{1+ج}{س+ع}$$

١٠) إذا كان $\frac{١}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{ج}{٤} = \frac{١٢ - ب + ٥ج}{٣س}$ احسب قيمة س

الحل

بضرب الاولى فى (٢) والثانية فى (-١) والثالثة فى (٥) والجمع

$$\text{احدى النسب} = \frac{١٢ - ب + ٥ج}{٢٠ + ٣ - ٤}$$

$$\frac{١٢ - ب + ٥ج}{٣س} = \frac{١٢ - ب + ٥ج}{٢١}$$

$$٣س = ٢١ \iff س = ٧$$

١١) إذا كانت م، ب، ج، و كميات متناسبة فإن

$$\frac{ج٢ - ١٣}{س٢ - ب٣} = \frac{ج٣ + ١٥}{س٣ + ب٥}$$

الحل

$$\text{نفرض ان } \frac{١}{ب} = \frac{ج}{س} = م$$

$$مب = م، ج = مس$$

$$\textcircled{١} \longleftarrow م = \frac{مس٣ + مب٥}{س٣ + ب٥} = \frac{ج٣ + ١٥}{س٣ + ب٥}$$

$$\textcircled{٢} \longleftarrow م = \frac{مس٢ - مب٣}{س٢ - ب٣} = \frac{ج٢ - ١٣}{س٢ - ب٣}$$

من (١)، (٢) نجد أن الطرفين متساويان

$$\frac{ج٢ - ١٣}{س٢ - ب٣} = \frac{ج٣ + ١٥}{س٣ + ب٥}$$

التناسب المتسلسل

إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{b}{j}$ فإن الكميات p ، b ، j في تناسب متسلسل ، والعكس :

إذا كانت p ، b ، j في تناسب متسلسل فإن $\frac{p}{b} = \frac{b}{j}$ ويسمى p بالاول المتناسب

، b بالوسط المتناسب ، j بالثالث المتناسب

ملاحظات

① إذا كان p ، b ، j في تناسب متسلسل فإن $p = 2b = 4j$

② إذا كان $\frac{p}{b} = \frac{b}{j} = \frac{j}{d} = \frac{d}{m} = \frac{m}{n} = \frac{n}{o} = \frac{o}{p}$ فإن $p = 2b = 4j = 8d = 16m = 32n = 64o$ ، $p = 2b = 4j = 8d = 16m = 32n = 64o$

تمارين محلولة

① أوجد العدد الذي إذا اضيف الى كل من الاعداد ٣ ، ٧ ، ١٥ فإنها تكون تناسبا متسلسلا

الحل

نفرض أن العدد هو s

$$\frac{3+s}{7+s} = \frac{7+s}{15+s} \iff (3+s)(15+s) = (7+s)^2$$

$$s^2 + 18s + 45 = s^2 + 14s + 49$$

$$18s - 14s = 49 - 45$$

$$4s = 4 \iff s = 1$$

② إذا كان p ، ٣ ، ٩ ، b في تناسب متسلسل أوجد قيمة p ، b ؟؟

الحل

$$27 = \frac{9}{b} = \frac{3}{a} = \frac{p}{3} \leftarrow p = 1, b = 27$$

③ إذا كانت p, b, d ، د في تناسب متسلسل أثبت ان

$$\frac{d-p}{b-d} = \frac{d+p}{b+d}$$

الحل

$$\text{نفرض ان } m = \frac{d}{b} = \frac{p}{d}$$

$$d = m, b = m^2, p = m^3$$

$$1+m = \frac{(1+m-m^2)(1+m)}{1+m-m^2} = \frac{(1+m^3)d}{(1+m-m^2)d} = \frac{d+m^3}{d+m-m^2} = \frac{d+p}{b-d}$$

$$1+m = \frac{(1+m)(1-m)}{1-m} = \frac{(1-m^2)m}{(1-m)m} = \frac{m-m^3}{m-m^2} = \frac{d-p}{b-d}$$

∴ الطرفان متساويان

④ إذا كان v وسطا متناسبا بين s, e أثبت ان

$$\frac{s^2}{e} = \frac{v^2}{e} + \frac{s^2}{v}$$

الحل

$$m = \frac{v}{e} = \frac{s}{v} \therefore s = me, v = m^2e$$

$$m^2e = m + m^2 = \frac{m^2e}{e} + \frac{m^2e}{m^2e} = \frac{v}{e} + \frac{s^2}{v}$$

$$m^2e = \frac{m^2e^2}{e} = \frac{s^2}{e}$$

∴ الطرفان متساويان

⑤ إذا كان p, b, j, d في تناسب متسلسل أثبت أن $(b+j)$ وسط متناسب

بين $(p+b), (j+d)$

الحل

$$\frac{p}{b} = \frac{j}{d} = m \quad \therefore j = dm, \quad b = dm^2, \quad p = dm^3$$

$$\boxed{1} \leftarrow 2m^2d + 3m^2d^2 + 4m^2d^3 = 2(m + dm^2) = 2(b + p)$$

$$2m^2d + 3m^2d^2 + 3m^2d^3 + 4m^2d^4 = (d + dm^2)(2m + 3m^2) = (j + d)(p + b)$$

$$\boxed{2} \leftarrow 2m^2d + 3m^2d^2 + 4m^2d^3 =$$

من (1)، (2) نجد أن :

$$\therefore (b + p) = 2(j + d)$$

$\therefore (b + p)$ وسط متناسب بين $(j + d)$

$$\textcircled{6} \text{ إذا كان } \frac{v}{e} = \frac{s}{s-v} \text{ أثبت أن } \frac{v}{e} = \frac{s}{s-v}$$

الحل

$$\therefore \frac{v}{e} = \frac{s}{s-v} \quad \therefore \frac{v}{e} = \frac{s}{s-v} \quad \therefore s = ve, \quad v = se$$

$$\frac{s}{s-v} = \frac{v}{e} \Rightarrow \frac{s}{s-ve} = \frac{v}{e} \Rightarrow \frac{s}{s(1-e)} = \frac{v}{e} \Rightarrow \frac{1}{1-e} = \frac{v}{e}$$

$$\boxed{1} \leftarrow \frac{v}{e} = \frac{(e-v)}{(e-ve)} =$$

$$\boxed{2} \leftarrow \frac{v}{e} = \frac{v^2e}{v^2e} = \frac{v}{e}$$

من [1]، [2] نجد أن :

$$\frac{v}{e} = \frac{s}{s-v}$$

٧) إذا كانت $p, ٥, ٦, ٧, ٨, د$ كميات موجبة في تناسب متسلسل فأثبت أن :

$$\sqrt{\frac{٥٦+٦٥}{٨+٧}} = \sqrt{\frac{٥٥}{٨}}$$

الحل

$$\text{نفرض أن } م = \frac{٧}{٨} = \frac{٦}{٧} = \frac{٥}{٦}$$

$$٧م = ٨, ٦م = ٧, ٥م = ٨$$

$$\boxed{١} \leftarrow م = \sqrt[٣]{\frac{٥٥}{٨}} = \sqrt[٣]{\frac{٥٥}{٨}}$$

$$\boxed{٢} \leftarrow م = \sqrt[٢]{\frac{(١+٢)٢م}{(١+٢)٨}} = \sqrt{\frac{٥٦+٦٥}{٨+٧}}$$

من [١] ، [٢] نجد أن

$$\sqrt{\frac{٥٦+٦٥}{٨+٧}} = \sqrt{\frac{٥٥}{٨}}$$

٨) أكمل ما يلي :

١) الثالث المتناسب للعدين ٩ ، -١٢ هو

٢) الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ هو

٣) إذا كان $p, ٢, ٤, ب$ في تناسب متسلسل فإن $٥+ب = \dots$

٤) إذا كانت $٧, س, \frac{١}{ص}$ في تناسب متسلسل فإن $٢ص = \dots$

٥) إذا كان $\frac{١}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{٥} = ٢$ فإن $٥ = \dots$

الحل : ١) ١٦ ٢) $٩ \pm$ ٣) ٩ ٤) ٧ ٥) $٥ = ٤٠$

⑨ إذا كانت p, b, d في تناسب متسلسل أثبت أن :

$$\frac{p}{d} = \left(\frac{b+p}{b+d} \right)^2$$

الحل

$$\text{نفرض أن } \frac{p}{b} = \frac{b}{d} = r$$

$$\therefore p = rd, \quad b = rd, \quad d = d$$

$$\text{①} \leftarrow r = \left(\frac{(1+r)d}{(1+r)d} \right)^2 = \left(\frac{rd + r^2d}{rd + rd} \right)^2 = \left(\frac{b+p}{b+d} \right)^2$$

$$\text{②} \leftarrow r = \frac{p}{d} = \left(\frac{b+p}{b+d} \right)^2$$

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\frac{p}{d} = \left(\frac{b+p}{b+d} \right)^2$$

⑩ إذا كانت b وسطا متناسبا بين p, d أثبت أن :

$$\frac{p^2}{d} = \frac{b^2}{d} + \frac{p^2}{b}$$

الحل

$$\text{نفرض أن } \frac{p}{b} = \frac{b}{d} = r$$

$$\therefore p = rd, \quad b = rd, \quad d = d$$

$$\text{①} \leftarrow \frac{p^2}{d} = \frac{(rd)^2}{d} = \frac{r^2d^2}{d} = r^2d$$

$$\text{②} \leftarrow \frac{b^2}{d} + \frac{p^2}{b} = \frac{(rd)^2}{d} + \frac{(rd)^2}{rd} = r^2d + r^2d = 2r^2d$$

من (١) ، (٢) نجد أن :

$$\frac{p}{b} = \frac{b}{j} + \frac{p}{b}$$

⑪ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين p ، ج أثبت أن :

$$b = \frac{p + b + j}{\frac{p}{b} + \frac{b}{j} + \frac{p}{b}}$$

الحل

$$\text{نفرض ان } \frac{b}{j} = \frac{p}{b} = m$$

$$\therefore b = jm , p = jm^2$$

$$\frac{j(1 + m + m^2)}{j^2 m^2 + jm + 1} = \frac{jm^2 + jm + j}{jm^2 + jm + 1} = \frac{p + b + j}{\frac{p}{b} + \frac{b}{j} + \frac{p}{b}}$$

$$b^2 = jm^2 = p$$

⑫ إذا كانت p ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل أثبت أن :

$$\sqrt{\frac{b}{d}} = \frac{p + b}{b + d}$$

الحل

$$\text{نفرض ان } \frac{p}{b} = \frac{b}{j} = \frac{j}{d} = m$$

$$\therefore j = dm , b = dm^2 , p = dm^3$$

$$\boxed{1} \leftarrow m = \frac{(d+m)^2 dm}{(d+m)d} = \frac{dm^2 + 2dm + dm^3}{dm + d + dm^3} = \frac{p + b}{b + d}$$

$$\boxed{2} \leftarrow m = \sqrt{\frac{dm^2}{d}} = \sqrt{\frac{b}{d}}$$

من (١) ، (٢) نجد أن الطرفين متساويين

١٣) اذا كانت ب وسطا متناسبا بين م، ج اثبت ان :

$$\frac{ج^2}{ب} = \frac{ج}{م} = \frac{ج^2 ب^3 - ج^2 ب^2}{ج^2 م^3 - ج^2 م^2}$$

الحل

$$\text{نفرض ان } \frac{ب}{ج} = \frac{م}{ج} = م$$

$$\therefore ب = ج م ، ج = م$$

$$\frac{1}{م} = \frac{ج^2 (م^3 - 2)}{ج^2 م^2 (م^3 - 2)} = \frac{ج^2 م^3 - ج^2 م^2}{ج^2 م^3 - ج^2 م^2} = \frac{ج^2 م^3 - ج^2 م^2}{ج^2 م^3 - ج^2 م^2} \leftarrow \boxed{1}$$

$$\frac{1}{م} = \frac{ج}{ج م} = \frac{ج}{م} \leftarrow \boxed{2}$$

$$\frac{1}{م} = \frac{ج^2}{ج^2 م} = \frac{ج^2}{م} \leftarrow \boxed{3}$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج المطلوب

١٤) أوجد العدد الذى اذا أضيف الى كل من الأعداد ٢ ، ٨ ، ٢٦ فإنها تكون تناسبا متسلسلا

الحل

نفرض أن العدد هو س

$$\frac{س+٢}{س+٨} = \frac{س+٨}{س+٢٦}$$

$$(س+٢)(س+٢٦) = (س+٨)^2$$

$$س^2 + ٢٨س + ٥٢ = س^2 + ١٦س + ٦٤$$

$$٢٨س - ١٦س = ٦٤ - ٥٢$$

$$١٢س = ١٢$$

$$س = ١$$

∴ العدد هو ١

التغير الطردى والعكسى

تعريف :

* يقال ان ص تتغير طرديا مع س وتكتب ص \propto س اذا كان ص = م س
(م ثابت لا يساوى صفر)

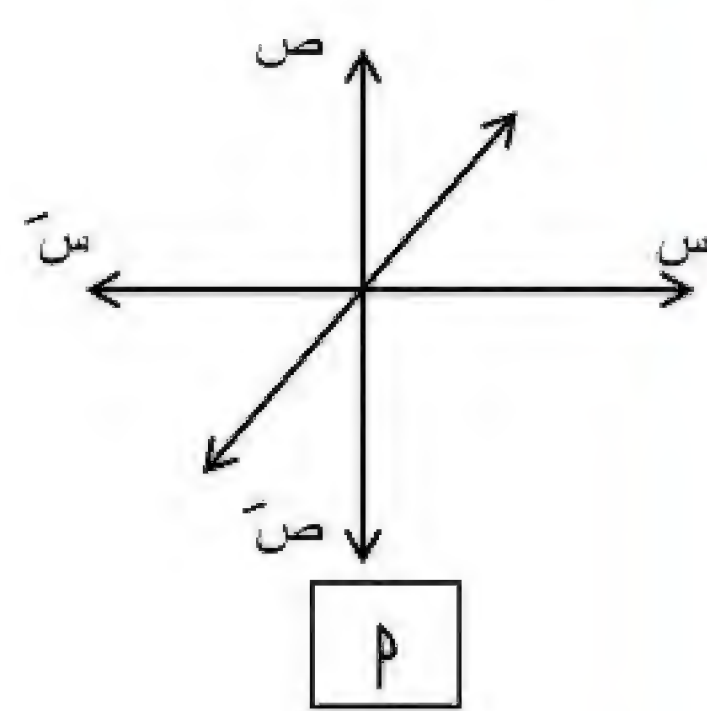
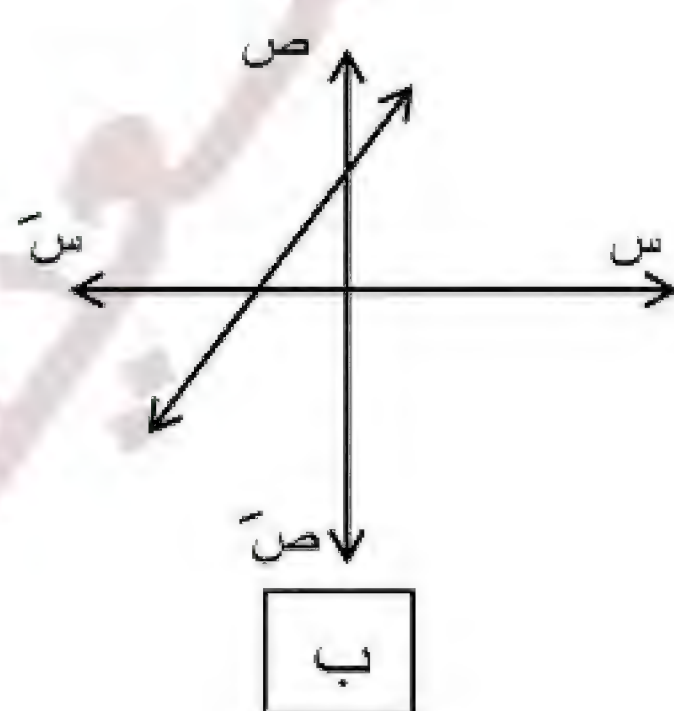
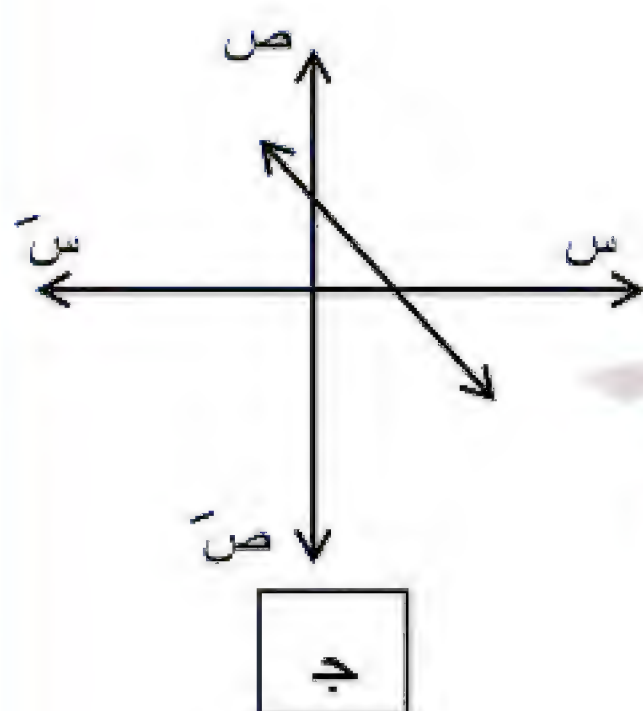
$$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$$

* يقال ان ص تتغير عكسيا مع س وتكتب ص $\propto \frac{1}{س}$ اذا كانت ص = $\frac{م}{س}$

$$\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$$

تمارين محلولة:

١) من الاشكال الاتية يمثل تغيرا طرديا بين س ، ص ؟



الحل : الشكل رقم (پ) يمثل تغيرا طرديا لأنه مستقيم يمر بنقطة الأصل

٢) اختر مما يلى العلاقة التى تمثل تغيرا طرديا بين المتغيرين س ، ص :

$$(پ) س ص = ٧ \quad (ب) ص = س + ٢ \quad (ج) \frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص} \quad (د) \frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$$

$$\text{الحل : } \frac{س}{٢} = \frac{ص}{٥}$$

٣ من بيانات الجدول التالي ؟ أجب عن الاسئلة التالية :

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

١ بين نوع التغير بين س ، ص

٢ أوجد ثابت التناسب

٣ أوجد قيمة ص عندما س = ٣

٤ أوجد قيمة س عندما $ص = \frac{٢}{٥}$

الحل

١ التغير عكسي

٢ ثابت التناسب = ١٢

٣ $ص \propto \frac{١}{س} \therefore ص \times س = ٢$

عندما س = ٣ $\therefore ٣ \times ص = ١٢ \therefore ص = ٤$

٤ عندما $ص = \frac{٢}{٥} \therefore \frac{٢}{٥} \times س = ١٢ \therefore س = ٥$

٤ في الجدول المقابل :

س	١	٢	ب	٤	٦
ص	١٢	٢	٣٦	٤٨	٧٢

١ بين نوع التغير بين س ، ص

٢ أوجد قيمتي ب ، م

الحل

١ التغير طردى

٢ $ص \propto س \therefore ص = م \times س \therefore ١٢ = م \times ١$

$٢٤ = ١٢ \times ٢ = م$

$٣٦ = ١٢ \times ب \therefore ب = ٣$

٥ إذا كان $١٢ = ٢ب + ٤م$ أثبت أن م تتغير طرديا بتغير ب

الحل

$$٠ = ٢ب + ٤م - ١٢$$

$$0 = 2(3 - p)$$

$$0 = 3 - p$$

$$p = \frac{3}{2} \therefore p \propto 3$$

⑥ إذا كانت $s^2 - 6s + 9 = 0$ أثبت أن v تتغير عكسيا مع s

الحل

$$0 = 2(3 - s)$$

$$s = 3$$

$\therefore v$ تتغير عكسيا مع s

$$\textcircled{7} \text{ إذا كان } \frac{v}{e} = \frac{s - 21}{e - 7} \text{ أثبت أن } v \propto e$$

الحل

$$e - 21 = \frac{e - 7}{v} \Rightarrow e - 21 = \frac{e - 7}{v}$$

$$e - 21 = \frac{e - 7}{v} \Rightarrow e - 21 = \frac{e - 7}{v}$$

$$e = 3 \quad v \propto e$$

⑧ إذا كانت v تتغير عكسيا بتغير s وكانت $v = 6$ عندما $s = 2,5$ فأوجد العلاقة

بين s ، v ثم أوجد قيمة v عندما $s = 5$

الحل

$$v \propto \frac{1}{s} \therefore s \cdot v = k$$

$$v = 6 \text{ عندما } s = 2,5$$

$$\therefore k = 2,5 \times 6 = 15$$

\therefore العلاقة بين s ، v هي : $s \cdot v = 15$

$$\text{عندما } s = 5 \Rightarrow v = 3$$

⑨ اکمل ما یلی :

① اذا كان ص - س = $\frac{1}{ص} - \frac{1}{س}$ حيث س $\neq 0$ ، ص $\neq 0$ فإن ص \propto

② اذا كانت ص = 3س فإن ص \propto

③ اذا كانت س ص - 7 = 0 فإن ص \propto

④ اذا كانت س² ص² - 4س ص + 4 = 0 فإن ص \propto

⑤ اذا كانت ص² - 6س ص + 9س² = 0 فإن ص \propto

⑥ اذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت س = $\sqrt{3}$ عندما ص = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ فإن ثابت التناسب =

⑦ اذا كانت $\frac{ص+3}{ص} = \frac{س+2}{س}$ حيث س $\neq 0$ ، ص $\neq 0$ فإن ص \propto

⑧ اذا كانت 2س - 3ص = 2ص - 5س فإن س \propto

⑨ اذا كان 7س ص = 8 فإن س \propto

⑩ اذا كان (س ص - 3) = 2 صفر فإن ص \propto

⑪ اذا كانت ص $\propto \frac{1}{س}$ فإن س تتناسب عكسيا مع

⑫ اذا كانت $\frac{ك}{ع} = \frac{م}{ح}$ حيث م ثابت لايساوى صفر فإن ك تتغير مع ل عند ثبوت ح ، ك تتغير مع ح عند ثبوت ل

⑬ اذا كانت ص $\propto \frac{5}{س}$ فإن ص تتغير عكسيا مع

الحل

① ص $\propto \frac{1}{س}$ ② ص $\propto س$ ③ ص $\propto \frac{1}{س}$ ④ ص $\propto \frac{1}{س}$ ⑤ ص $\propto س$

⑥ ثابت التناسب = 2 ⑦ ص $\propto س$ ⑧ س $\propto ص$ ⑨ س $\propto \frac{1}{ص}$

⑩ س تتناسب عكسيا مع ص^٢

⑩ ص ∝ $\frac{1}{س}$

⑪ ث تتغير طرديا مع ل عند ثبوت ح ، ث تتغير عكسيا مع ح عند ثبوت ل

⑫ ص تتغير عكسيا مع س

⑬ إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديا مع وزنه على الأرض

(ر) ، وكان الجسم يزن ٨٤ كيلو جراما على الأرض ، ووزنه ١٤ كيلوجراما

على القمر ، فماذا يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤

كيلو جراما ؟

الحل

$$\therefore و \propto ر \quad \therefore و = ٢م \quad ٨٤ \times ٢ = ١٤$$

$$\frac{1}{٦} = \frac{١٤}{٨٤} = ٢$$

$$و = \frac{1}{٦} ر \quad \text{عندما } ر = ١٤٤ \therefore و = ١٤٤ \times \frac{1}{٦} = ٢٤ \text{ كيلو جراما}$$

⑭ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديا مع الزمن

فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلومترا في ٦ ساعات فكم كيلومترا تقطعها السيارة

في ١٠ ساعات

الحل

$$ف \propto ر \quad \therefore ف = ٢م$$

$$١٥٠ = ٦ \times ٢ \quad \therefore ٢٥ = ٢ \quad \text{العلاقة هي : } ف = ٢٥ ر$$

$$\text{عندما } ر = ١٠ \therefore ف = ٢٥ \times ١٠ = ٢٥٠$$

ف = ٢٥٠ كيلومترا

١٢) إذا كان مقدار السرعة E التي يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم N وكانت $E = 5$ سم/ث عندما $N = 3$ سم أوجد E عندما $N = 2,5$ سم

الحل

$$E \propto \frac{1}{N^2} \quad \therefore E = \frac{K}{N^2}$$

$$\frac{K}{9} = 5 \quad \therefore K = 45$$

$$E = \frac{45}{N^2} \quad \text{عندما } N = 2,5 \quad \text{تكون } E = \frac{45}{(2,5)^2} = 7,2 \text{ سم/ث}$$

١٣) إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسياً مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل فإذا أنجز العمل ٦ عمال في أربع ساعات فما الزمن الذي يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل ؟

الحل

$$N \propto \frac{1}{S} \quad \therefore N = \frac{K}{S} \quad \frac{K}{6} = 4 \quad \therefore K = 24$$

$$N = \frac{24}{S} \quad \text{عندما } S = 8 \quad \therefore N = \frac{24}{8} = 3$$

\therefore الزمن الذي يستغرقه هو ٣ ساعات

١٤) إذا كان $V = 9 - P$ وكان $V \propto \frac{1}{P}$ وكان $P = 18$ عندما $S = \frac{2}{3}$ فأوجد العلاقة

بين V ، S ثم استنتج قيمة V عندما $S = 1$

الحل

$$\therefore V \propto \frac{1}{S} \quad \therefore V = \frac{K}{S}$$

$$9 - p = \frac{2}{s}$$

$$4 = (9 - 18) \left(\frac{2}{3} \right) = 2$$

$$3 = s(9 - p)$$

∴ العلاقة هي : $\frac{4}{2} = \text{ص} = \text{عندما } s = 1 \text{ تكون ص} = 4$

١٥ بين ايا من الجداول الاتية يمثل تغيرا طرديا وايها يمثل تغيرا عكسيا وايها لا يمثل طرديا او عكسيا مع ذكر السبب ؟

ص	س
6	3
9-	2-
1	18-
2-	9

4

ص	س
9	5
18	10
27	15
45	25

3

ص	س
9	2
18	4
54	12
72	16

2

ص	س
20	3
12	5
15	4
10	6

1

الحل

الجدول رقم (١) تغير عكسي

السبب : $60 = 6 \times 10$ ، $60 = 15 \times 4$ ، $60 = 12 \times 5$ ، $60 = 20 \times 3$

الجدول رقم (٢) تغير طردى

السبب : $\frac{72}{16} = \frac{54}{12} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

الجدول رقم (٣) تغير طردى

السبب : $\frac{45}{25} = \frac{27}{15} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

الجدول رقم (٤) ليس طرديا وليس عكسيا

السبب : $\frac{9-}{2-} \neq \frac{6}{3}$ ، $1 \times 18- \neq 6 \times 3$

١٦) إذا كانت شدة الاستضاءة (ش) لمصباح تتغير عكسياً مع مربع بعد المصباح (ف)
عن تلميذ يذاكر دروسه على بعد ١٢ متر فإذا كانت شدة الاستضاءة ضعيفة فما هو البعد
الذي يوضع فيه المصباح حتى تزيد قوة الاستضاءة الى أربعة أمثالها ؟

الحل

$$\text{ش} \propto \frac{1}{\text{ف}^2}$$

$$\frac{\text{ش}_1}{\text{ش}_2} = \frac{\text{ف}_2^2}{\text{ف}_1^2}$$

$$\text{ش}_1 = \text{ش} \text{ عندما } \text{ف} = 12$$

$$\text{ش}_2 = 4 \text{ ش عندما } \text{ف} = ?$$

$$\frac{\text{ش}}{4 \text{ ش}} = \frac{\text{ف}_2^2}{(12)^2} \Rightarrow \text{ف}_2^2 = 36 \Rightarrow \text{ف}_2 = 6$$

∴ البعد = ٦ متر

١٧) تتحرك سيارة كتلتها ٣ طن بسرعة منتظمة تحت تأثير مقاومة تتناسب مع سرعتها فإذا
كانت المقاومة ٦ ث.كجم/طن من كتلة السيارة عندما كانت سرعتها ٥٠ كم/س أوجد سرعة
السيارة إذا كانت المقاومة ٢٧ ث.كجم

الحل

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{م}_1}{\text{م}_2}$$

$$\frac{27}{\text{ع}_2} = \frac{3 \times 6}{50}$$

$$\text{ع}_2 = 75 \text{ كم/س}$$

الإحصاء

جمع البيانات

مصادر جمع البيانات

ثانوية (تاريخية)

أولية (ميدانية)

تعريفها: هي المصادر التي يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية

أمثلة: نشرات الجهاز المركزي

للتعبئة والإحصاء والانترنت

ووسائل الإعلام

مميزاتها: توفير الوقت والجهد

والمال

عيوبها: عدم الدقة أحيانا

تعريفها: هي المصادر التي نحصل منها على البيانات بشكل مباشر

أمثلة: المقابلة الشخصية ، الاستبيان واستطلاع الرأي

مميزاتها: الدقة

عيوبها: تحتاج الى وقت ومجهود

كبير كما أنها مكلفة ماديا

أساليب جمع البيانات

أسلوب العينات

أسلوب الحصر الشامل

تعريفه : يقوم على فكرة اختيار

عينة من المجتمع الإحصائي

الذي تمثله ونجري البحث على

العينة وما نحصل عليه من نتائج

يتم تعميمه على المجتمع

بأكمله

مميزاته : توفير الوقت والجهد

والتكاليف

عيوبه : عدم دقة النتائج إذا

كانت العينة المختارة لا تمثل

المجتمع تمثيلاً جيداً

تعريفه : يعنى جمع البيانات

المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من

جميع مفردات المجتمع الإحصائي

أمثلة : التعداد العام للسكان

مميزاته : الشمول وعدم التحيز

والدقة في النتائج

عيوبه : يحتاج الى وقت طويل

ومجهود كبير وتكلفة باهظة

أنواع العينات

عينات عشوائية

عينات غير عشوائية

عينة عشوائية

طبقية

عينة عشوائية

بسيطة

$$\text{عدد مفردات الطبقة في العينة} = \frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلي}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلي}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

مثال

إذا كان هناك في إحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى ، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية ، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة ، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة ، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فاحسب عدد مفردات كل طبقة في العينة

الحل

العدد الاجمالي للطلاب = ٤٠٠٠ + ٣٠٠٠ + ٢٠٠٠ + ١٠٠٠ = ١٠٠٠٠ طالب

عدد مفردات الطبقة الاولى من العينة = $\frac{٤٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ٢٠٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الثانية من العينة = $\frac{٣٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ١٥٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الثالثة من العينة = $\frac{٢٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ١٠٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الرابعة من العينة = $\frac{١٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ٥٠$ طالب

حاول بنفسك

مدرسة اعدادية بها ٣٥٠ طالب بالصف الاول ، ٣٥٠ طالبا بالصف الثاني ، ٣٠٠ طالب بالصف الثالث ويرغب مجلس ادارتها في اقامة ندوة علمية لعينة من الطلبة اختيرت عينة تتكون من ١٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها احسب عدد مفردات كل طبقة ؟

التشتت

تذكر أن

مقاييس النزعة المركزية هي :

☀ الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عددتها}}$

فالوسط الحسابي للقيم ١٥، ٥، ٢٠، ١٠، ٢٥ هو $\frac{١٥+٥+٢٠+١٠+٢٥}{٥}$

$$١٥ = \frac{٧٥}{٥} =$$

☀ الوسيط هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا

فالوسيط للقيم ٤، ٥، ٦، ٨، ١١ هو ٦

والوسيط للقيم ٤، ٥، ٦، ١١ هو $\frac{٥+٦}{٢} = ٥\frac{١}{٢}$

☀ المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر تكرار بين القيم

فالمنوال للقيم ٤، ٧، ٥، ٧، ٧ هو ٧

والمنوال للقيم ٥، ٦، ٥، ٧، ٥، ٥ هو ٥

حاول بنفسك

إذا كان الوسط الحسابي للأعداد ٣-، ٣-، ٣-، ١+، ٢+، ٢+، ٣+،

٢+، ٥ هو ١٣ احسب قيمة ٢

التشتت لأي مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الاختلاف بين
مفرداتها ويكون التشتت صغيرا اذا كان الاختلاف بين المفردات قليلا
ويكون التشتت كبيرا اذا كان الاختلاف بين المفردات كبيرا وهو
يعبر عن مدى تجانس المجموعات

ملاحظة

اذا تساوت جميع المفردات فإن التشتت = صفر

مقاييس التشتت

الانحراف المعياري

هو الجذر التربيعي الموجب
لمتوسط مربعات انحرافات
القيم عن وسطها الحسابي
ويرمز له بالرمز σ سيجما

$$= \sqrt{\frac{\sum (s - \bar{s})^2}{n}}$$

حيث n عدد المفردات

\bar{s} الوسط الحسابي

المدى

هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر
قيمة لمجموعة من المفردات
وهو أبسط وأسهل طرق قياس التشتت
ولكن من عيوبه أنه يتأثر كثيرا
بالقيم المتطرفة

الانحراف المعياري لمجموعة من المفردات

احسب الانحراف المعياري لمجموعة القيم ٨، ٩، ٧، ٦، ٥

س	س - س̄	(س - س̄)²
٨	٨ - ٧ = ١	١
٩	٩ - ٧ = ٢	٤
٧	٧ - ٧ = ٠	٠
٦	٦ - ٧ = -١	١
٥	٥ - ٧ = -٢	٤
المجموع		١٠

$$\bar{س} = \frac{٥ + ٦ + ٧ + ٩ + ٨}{٥} = ٧$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{١٠}{٥}} = \sqrt{٢} = ١,٤$$

الانحراف المعياري لتوزيع تكراري

مجد (س - س̄)² ل

مجد ل

= σ

الجدول التالي يبين اعمار ٢٠ شخصا بالسنين اوجد

تمرين

الانحراف المعياري للأعمار

العمر	١٥	٢٠	٢٢	٢٣	٢٥	٣٠	المجموع
عدد الأشخاص	٢	٣	٥	٥	١	٤	٢٠

س	ك	س×ك	س-س̄	(س-س̄)²	(س-س̄)²×ك
١٥	٢	٣٠	٨- = ٢٣- ١٥	٦٤	١٢٨
٢٠	٣	٦٠	٣- = ٢٣- ٢٠	٩	٢٧
٢٢	٥	١١٠	١- = ٢٣- ٢٢	١	٥
٢٣	٥	١١٥	٠ = ٢٣- ٢٣	٠	٠
٢٥	١	٢٥	٢ = ٢٣- ٢٥	٤	٤
٣٠	٤	١٢٠	٧ = ٢٣- ٣٠	٤٩	١٩٦
مج	٢٠	٤٦٠			٣٦٠

$$\sigma = \sqrt{\frac{360}{20}} = \sqrt{18} \approx 4.24 \text{ سنت}$$